



”

Лукашова Т., Друшляк М. Впровадження концепції фундування знань в професійну підготовку майбутніх учителів математики. *Освіта. Інноватика. Практика*, 2022. Том 10, № 4. С. 15-19. DOI: 10.31110/2616-650X-vol10i4-002

Lukashova T., Drushlyak M. Vprovadzhennia kontseptsii funduvannia znan v profesiinu pidhotovku maibutnikh uchyteliv matematyky [Implementation of the concept of knowledge foundation in the pre-service mathematics teachers' professional training]. *Osvita. Innovatyka. Praktyka – Education. Innovation. Practice*, 2022. Vol. 10, № 4. S. 15-19. DOI: 10.31110/2616-650X-vol10i4-002

УДК 378.147

DOI: 10.31110/2616-650X-vol10i4-002

Тетяна ЛУКАШОВА

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка, Україна

<https://orcid.org/0000-0002-1465-9530>

tanya.lukashova2015@gmail.com

Марина ДРУШЛЯК

Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка, Україна

<https://orcid.org/0000-0002-9648-2248>

marydru@fizmatsspu.sumy.ua

ВПРОВАДЖЕННЯ КОНЦЕПЦІЇ ФУНДУВАННЯ ЗНАНЬ В ПРОФЕСІЙНУ ПІДГОТОВКУ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

Анотація. За університетськими стандартами, окрім елементарної математики й методики навчання математики, студенти вивчають фундаментальні курси вищої математики, в яких розглядається матеріал, що виходить далеко за межі шкільної програми. При цьому у студентів складається хибне уявлення про те, що їх навчають не тому, що їм стане у нагоді у майбутній професійній діяльності. Зазначимо, що одним з основних завдань при вивченні вищої математики у закладах вищої освіти є формування у студентів усвідомлення того факту, що без знання наукового фундаменту елементарної математики вони не стануть висококваліфікованими вчителями математики. Потрібно узагальнювати та систематизувати поняття шкільного курсу математики, досліджувати їх властивості та формувати науковий погляд на них з позицій вищої математики (зокрема, можливість введення відповідних понять та теорій на основі аксіоматичного методу). Автори пропонують впроваджувати концепцію фундування знань майбутніх учителів математики в ході їх професійної підготовки. Демонструють цю ідею на прикладі формуванні, систематизації та поглибленні знань учнів про функцію, можливості введення базових функцій єдиним способом, що дало б змогу прояснити їх основний зміст та виявити спільні риси. Такий універсальний підхід є можливим у рамках аксіоматичного визначення базових функцій через функціональні рівняння. Даний приклад підтверджує факт того, що усвідомлення майбутніми вчителями математики «наслідків» тієї чи іншої дисципліни для професійної діяльності, розуміння міжпредметних зв'язків можливе через впровадження концепції фундування знань студентів в ході їх професійної підготовки.

Ключові слова: фундування знань; майбутні вчителі математики; професійна підготовка майбутніх учителів математики; функціональні рівняння; функція.

Tetiana LUKASHOVA

Makarenko Sumy State Pedagogical University, Ukraine

<https://orcid.org/0000-0002-1465-9530>

tanya.lukashova2015@gmail.com

Marina DRUSHLYAK

Makarenko Sumy State Pedagogical University, Ukraine

<https://orcid.org/0000-0002-9648-2248>

marydru@fizmatsspu.sumy.ua

IMPLEMENTATION OF THE CONCEPT OF KNOWLEDGE FOUNDATION IN THE PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS' PROFESSIONAL TRAINING

Abstract. According to university standards, in addition to elementary mathematics and methods of teaching mathematics, students study foundation courses in higher mathematics, which consider the material that goes far beyond the school curriculum. At the same time, students have the wrong idea that they are being taught not material that will be useful to them in their future professional activities. One of the main tasks in the study of higher mathematics in institutions of higher education is the formation of students' awareness that without knowledge of the scientific foundation of elementary mathematics, they will not become highly qualified mathematics teachers. It is necessary to generalize and systematize the concepts of the school mathematics course, investigate their properties, and form a scientific view of them from the standpoint of higher mathematics (in particular, the possibility of introducing relevant concepts and theories based on the axiomatic method). The authors suggest introducing the concept of foundation of knowledge of pre-service mathematics teachers during their professional training. This idea is demonstrated in the example of the formation, systematization, and deepening of students' knowledge about the function, the possibility of introducing basic functions in a single way, which would make it possible to clarify their main content and identify common features. Such a universal approach is possible within the framework of the axiomatic definition of basic functions through functional equations. This example confirms the fact that pre-service mathematics teachers' awareness of the "consequences" of one or another discipline for professional activity, and understanding of cross-curricular connections is possible through the implementation of the concept of foundation of students' knowledge in the course of their professional training.

Keywords: foundation of knowledge; pre-service mathematics teachers; pre-service mathematics teachers' professional training; functional equations; function.

Постановка проблеми. Вітчизняна освіта володіє багатим досвідом підготовки майбутніх учителів математики, але все одно така підготовка стикається із низкою проблем. На нашу думку, частина з цих проблем пов'язана зі змістом фундаментальних курсів математики, що вивчаються в закладах вищої освіти, а також з методикою викладання цих курсів. Майбутні вчителі математики усвідомлюють, що у школі їм доведеться викладати переважно елементарну математику і лише окремі теми вищої. Проте, за університетськими стандартами, окрім елементарної математики й методики навчання математики, студенти вивчають фундаментальні курси вищої математики, в яких розглядається матеріал, що виходить далеко за межі шкільної програми. При цьому у студентів складається хибне уявлення про те, що їх вчать не тому, що їм стане у нагоді у майбутній професійній діяльності.

Основна мета вивчення фундаментальних курсів математичного аналізу, алгебри, геометрії та інших розділів вищої математики у закладах вищої освіти полягає насамперед, у формуванні наукового світогляду й математичної культури майбутнього вчителя, у розвитку його мислення, здатності міркувати строго і логічно. Окрім того, більшість понять елементарної математики вивчаються у шкільному курсі неповно й у спрощеному вигляді (наприклад, поняття похідної). Їх обґрунтування здійснюється лише під час вивчення фундаментальних курсів аналізу, алгебри, геометрії, логіки тощо. Таким чином, одним з основних завдань при вивченні вищої математики у закладах вищої освіти є формування у студентів усвідомлення того факту, що без знання наукового фундаменту елементарної математики, вони не стануть висококваліфікованими вчителями математики.

Звернемося до досвіду фундування знань майбутніх учителів математики у Сумському державному педагогічному університеті імені А. С. Макаренка. Освітня програма «Середня освіта (Математика. Інформатика)» підготовки здобувачів вищої освіти на другому (магістерському) рівні 2021 року (<http://surl.li/dnfsv>) передбачала вивчення ОК12 «Наукові основи навчання математики», основною метою якої було узагальнення та систематизація понять шкільного курсу математики, дослідження їх властивостей та формування наукового погляду на них з позицій вищої математики (зокрема, можливість уведення відповідних понять та теорій на основі аксіоматичного методу). Такий підхід повністю відображає тенденції розвитку сучасної математики та дозволяє строго означити навіть ті математичні поняття, які в шкільному курсі математики вводяться на інтуїтивному рівні (наприклад, поняття натурального числа, довжини, площі, вектора тощо), а також проаналізувати різні підходи і концепції щодо побудови відповідних математичних теорій.

Аналогічна освітня програма 2022 року (<http://surl.li/dnfsw>) вже не містить вказаної вище освітньої компоненти, а відповідний курс пропонується як вибіркова дисципліна. Зрозуміло, що вилучення вказаного курсу з переліку освітніх компонент підготовки магістрів не дозволяє систематично і у повній мірі розглянути відповідні питання та сформувати у студентів відповідні компетентності (у тому випадку, коли студенти не вибирають відповідну дисципліну). Вихід з такої ситуації автори вбачають у впровадженні концепції фундування знань майбутніх учителів математики в ході їх професійної підготовки, що й обумовлює мету статті.

Мета статті – обґрунтувати необхідність впровадження фундування знань майбутніх учителів математики в ході їх професійної підготовки. Зауважимо, що автори вже зверталися до проблеми фундування знань при підготовці майбутніх учителів математики у роботі [8]. Продемонструємо застосування концепції фундування знань при вивченні функціональної змістової лінії.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Вперше поняття фундування зустрічається у дослідженнях В. Д. Шадрікова та Є. І. Смірнова (2002 р.) як процес створення умов для поетапного поглиблення та розширення шкільних знань у напрямі професіоналізації та формування цілісної системи наукових та методичних знань, як процес формування цілісної системи професійно-педагогічної діяльності [7]. Є. І. Смірнов зазначає, що «принциповою відмінністю структуроутворюючого принципу фундування є визначення основи для спіралеподібної схеми моделювання базових знань, умінь, навичок математичної підготовки учнів» [7].

І. В. Кузнецова та В. А. Тестов вважають, що подолати роз'єднаність різних математичних дисциплін, ізольованість окремих тем і розділів, забезпечити цілісність та єдність у навчанні математики можливо лише на основі виділення у ній найбільш суттєвих, основних стрижнів. «Одним із визначальних принципів побудови будь-якого математичного курсу є принцип генералізації знань, який означає, що починати побудову курсу треба з виділення основних структур і понять та організовувати матеріал навчання в порядку логічного розгортання цих структур та понять у міру їхньої конкретизації в систему математичної науки» [4]. Саме концепція фундування знань включає, крім принципу поетапності формування знань, також і принцип генералізації знань.

М. М. Ковтонюк акцентує увагу на тому, що розвиток змістової лінії кожної математичної дисципліни в закладі вищої освіти, продовжуючи вивчення математичних дисциплін у закладах загальної середньої освіти, іде по спіралі (математичні об'єкти вивчаються повторно, але вже з більш загальних позицій). «Математичні об'єкти вивчаються у відповідності зі зростанням рівня

узагальненості і тому елементи нового знання, базуючись на попередніх, утворюють своєрідний перехід на більш високий ступінь інтелектуального розвитку і професійної підготовки студента» [3].

Методи дослідження. Для досягнення мети були використані методи теоретичного рівня наукового пізнання: аналіз наукової літератури, синтез, формалізація наукових джерел, опис, зіставлення, узагальнення власного досвіду.

Виклад основного матеріалу дослідження. Одним із найважливіших завдань шкільного курсу алгебри і початків аналізу є формування, систематизація та поглиблення знань учнів про функцію – одне з фундаментальних понять сучасної математики. При цьому множина вихідних, базових функцій, що вивчаються у школі, є порівняно невеликою. До них відносять: лінійну, показникову, логарифмічну, степеневу, деякі тригонометричні функції (синус, косинус) та обернені до них (арксинус, арккосинус). Усі інші елементарні функції можна отримати з базових шляхом застосування до них арифметичних дій (зокрема, додавання і множення) та операції композиції функцій.

Для кожної базової функції існує цілий ряд способів її визначення. Зокрема, логарифмічну функцію можна ввести як обернену до показникової, як інтеграл певного виду, як розв'язок деякого диференціального рівняння, як суму степеневих рядів в області його збіжності тощо. Ще більше різноманітними є способи введення тригонометричних функцій.

Тому природно поставити питання про можливість введення базових функцій єдиним способом, що дало б змогу прояснити їх основний зміст та виявити спільні риси. Такий універсальний підхід є можливим у рамках аксіоматичного визначення базових функцій через *функціональні рівності (рівняння)* і спирається на той факт, що кожна з них (зокрема, лінійна, показникова, логарифмічна та степенева функції) є неперервним гомоморфним відображенням двох числових груп $(R, +)$ та $(R^+, \cdot)$ на себе чи одна в іншу [5, 6].

Функціональними прийнято називати такі рівняння (рівності), у яких шуканими є функції, що пов'язані з відомими функціями за допомогою операцій додавання, множення та композиції [2]. Такі рівняння досить часто виникають при розв'язуванні різноманітних задач математики, механіки, фізики та астрономії.

Питання про розв'язування функціональних рівнянь є одним з найстаріших в курсі математичного аналізу, а теоретичні та практичні застосування таких рівнянь спонукали видатних математиків до їх вивчення. Зокрема, обґрунтування закону додавання сил призвело до розв'язування рівняння

$$f(x+y) + f(x-y) = 2 \cdot f(x) \cdot f(y),$$

яке прийнято називати рівнянням Даламбера. А функціональне рівняння

$$f^2(x) = f(x-y) + f(x+y)$$

використовувалось М. Лобачевским для визначення кута паралельності у неевклідовій геометрії.

Ґрунтовне вивчення функціональних рівнянь, які описують характеристичні властивості базових елементарних функцій було започатковано О. Коші. Зокрема, введені ним рівняння

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in R$$

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \quad x, y \in R$$

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in R^+$$

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \quad x, y \in R$$

здають лінійну, показникову, логарифмічну, степеневу функції відповідно. Ці рівняння нерідко використовуються в різних галузях математики та називаються *рівняннями Коші*.

Незважаючи на те, що вивчення функціональних рівнянь у школі не передбачено програмою з математики, такі властивості функцій, як парність, непарність, періодичність визначаються за допомогою функціональних рівнянь виду: $f(x) = f(-x)$, $f(-x) = -f(x)$, $f(x+t) = f(x)$ для $x \in R$, $t = const$. Це дає підстави застосовувати функціональні рівняння з метою аксіоматичного введення базових елементарних функцій, принаймні у класах з поглибленим вивченням математики. Проілюструємо сказане на прикладі показникової функції.

Показниковою функцією з основою a , визначеною на множині R , назвемо функцію, для якої:

1) $f(1) = a$, де $a > 0$ і $a \neq 1$;

2) для будь-яких $x, y \in R$ $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$;

3) функція f – неперервна на множині R .

Доцільно організувати колективне дослідження – знайти $f(0)$. У силу пункту 2:

$$f(0+1) = f(0) \cdot f(1);$$

$$f(1) = f(0) \cdot f(1).$$

Звідки $f(0) = 1$. Далі можна визначити значення $f(2)$, $f(3)$, ..., $f(n)$:

$$f(2) = f(1+1) = f(1) \cdot f(1) = a \cdot a = a^2;$$

$$f(3) = f(2+1) = f(2) \cdot f(1) = a^2 \cdot a = a^3.$$

Таким чином, учні переконуються, що $f(n) = a^n$.

Після цього одержують значення $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f\left(\frac{1}{n}\right)$, $f\left(\frac{m}{n}\right)$, $f\left(-\frac{m}{n}\right)$, де $m, n \in \mathbb{N}$:

$$a = f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \otimes f\left(\frac{1}{2}\right) = f^2\left(\frac{1}{2}\right), \text{ тобто } f\left(\frac{1}{2}\right) = a^{\frac{1}{2}},$$

$$a = f(1) = f\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) \otimes f\left(\frac{1}{3}\right) \otimes f\left(\frac{1}{3}\right) = f^3\left(\frac{1}{3}\right), \text{ тобто } f\left(\frac{1}{3}\right) = a^{\frac{1}{3}}.$$

Очевидно, що $f\left(\frac{1}{n}\right) = a^{\frac{1}{n}}$. Учні також розглядають наступні рівності:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f^m\left(\frac{1}{n}\right) = a^{\frac{m}{n}},$$

$$1 = f(0) = f\left(-\frac{m}{n} + \frac{m}{n}\right) = f\left(-\frac{m}{n}\right) \otimes f\left(\frac{m}{n}\right).$$

Вони приходять до висновку, що $f\left(-\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{m}{n}\right)} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{-\frac{m}{n}}$.

На основі проведеного дослідження можна зробити висновок, що властивості 1-3 однозначно визначають функцію, значення якої у всіх раціональних точках обчислюються за формулою:

$$f(x) = a^x, \text{ де } a > 0, a \neq 1.$$

Потім варто показати, що аналітичний вигляд функції такий же й тоді, коли x – ірраціональне число. Для цього розглядається послідовність раціональних чисел $\{r_n\}$ така, що $r_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$.

Тоді $f(r_n) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$ в силу неперервності функції f . Але $f(r_n) = a^{r_n}$, де $r_n \in \mathbb{Q}$. Маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = a^x.$$

Оскільки границя єдина, то $f(x) = a^x$, де $x \in \mathbb{R}$.

Таким чином, усвідомлюється аксіоматичний спосіб визначення функції як функції, яка є розв'язком деякого функціонального рівняння (його ще називають характеристичним), а також один із відомих методів розв'язування функціональних рівнянь – *метод Коші*. Зазначимо, що метод Коші полягає в тому, що пошук неперервної функції $f(x)$, яка є розв'язком функціонального рівняння, ведеться поетапно. Насамперед за допомогою вдало підібраних підстановок шукана функція визначається спочатку на множині натуральних чисел, потім – на множині цілих чисел, а далі – на множині раціональних чисел. Після цього граничним переходом функцію визначаються на множині ірраціональних чисел. Результатом пошуку є формула, яка визначає шукану функцію на заданій у задачі множині. Завершується розв'язання обов'язковою перевіркою того, що знайдена функція задовольняє умови задачі.

Варто підкреслити, що процес розв'язування функціональних рівнянь, який був показаний вище, – це непроста, цікава пошукова робота, це фактично процес «відкриття» деякої функції за її характеристичними властивостями, що ілюструє прикладну значимість методів математики. З огляду на те, що, розв'язування кожного функціонального рівняння, навіть у випадку вдало підбраного методу, перетворюється на невелике самостійне дослідження.

Зазначимо також, що наведений універсальний підхід до визначення елементарних функцій може бути певною мірою реалізований у рамках ОК5 «Олімпіадна математика», ОК6 «Методика навчання математики у старшій школі» програми підготовки магістрів за спеціальністю «Середня освіта (Математика)», а також ОК13 «Математичний аналіз» та ОК14 «Диференціальні рівняння» програми підготовки бакалаврів за тією ж спеціальністю.

Висновки та перспективи подальшого дослідження. У багатьох випадках конкретний математичний матеріал, що вивчається майбутніми вчителями математики, не вибудовується в єдину систему знань; їх знання складаються із слабо пов'язаних між собою догматично засвоєних знань, причому вони не в змозі самостійно їх структурувати та осмислити.

З метою формування у майбутніх вчителів математики свідомого підходу до вивчення фундаментальних дисциплін, навчання кожного курсу слід розпочинати із роз'яснення обставин його виникнення, з конкретних задач практики (а можливо, й шкільних задач), які сприяли його становленню та розвитку, а також застосувань як у шкільній математиці, так і в інших галузях знань. Усвідомлення майбутніми вчителями математики «наслідків» тієї чи іншої дисципліни для професійної діяльності, розуміння міжпредметних зв'язків можливе через впровадження концепції фундування знань студентів

в ході їх професійної підготовки. Як підтверджує досвід, це сприяє підвищенню інтересу до предмету та усвідомленню його важливості, а питання вищої математики, які пов'язуються з проблемами елементарної, викликають найбільший інтерес та добре запам'ятовуються студентами.

Список використаних джерел

1. Буракова Г. Ю., Карпова Т. Н. Фундирование как метод формирования специальных компетенций будущих учителей математики. *Ярославский педагогический вестник*. 2016. №2.
2. Вороний О. М. Готуємось до олімпіад з математики. Х.: Вид. група «Основа». 2008.
3. Ковтонюк М.М. Застосування принципу фундування у процесі вивчення математичних дисциплін. *Педагогічні науки*. 2012. № 61. 250-256.
4. Кузнецова И. В., Тестов В. А. Принципы фундирования при изучении основных алгебраических структур будущими учителями математики. *Вестник ВГУ. Серия. Проблемы высшего образования*. 2016. №1. 66-72.
5. Пенцак Є., Юрчишин А. Функціональні рівняння. Львів: ЛДУ. 1998.
6. Семенець С.П. Функціональні рівняння як засіб введення елементарних функцій у курсі алгебри і початків аналізу. *Вісн. Житомир. держ. ун-ту ім. І. Франка*. 1999. №3, 34-36.
7. Смирнов Е. Фундирование как методология и инновационный механизм профессионального становления педагога. *Международный интернет-симпозиум SWorld "Перспективные инновации в науке, образовании, производстве и транспорте"*-Педагогика, психология и социология. 2013. 5-17.
8. Шищенко І., Лукашова Т., Страх О. Фундування знань у процесі вивчення математичних понять засобами цифрових технологій у фаховій підготовці майбутніх учителів математики. *Фізико-математична освіта*, 2022, №32(6), 57–63. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2021-032-6-009>.

References

1. Burakova G. Ju., Karpova T. N. Fundirovanie kak metod formirovaniya special'nyh kompetencij budushhih uchitelej matematiki [Funding as a method for the formation of special competencies of future teachers of mathematics.]. *Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik – Yaroslavl Pedagogical Bulletin*. 2016. No2.
2. Voronyi O. M. Hotuiemos do olimpiad z matematyky [We are preparing for the mathematics olympiads]. Kh.: Vyd. hrupa «Osnova». 2008.
3. Kovtoniuk M.M. Zastosuvannia pryntsypu funduvannia u protsesi vyvchennia matematychnykh dystsyplin [Application of the foundation principle in the process of studying mathematical disciplines]. *Pedahohichni nauky – Pedagogical sciences*. 2012. No 61. 250-256.
4. Kuznecova I. V., Testov V. A. Principy fundirovaniya pri izuchenii osnovnykh algebraicheskikh struktur budushhimi uchiteljami matematiki [Funding principles in the study of basic algebraic structures by future teachers of mathematics.]. *Vestnik VGU. Seriya. Problemy vysshego obrazovaniya – Bulletin of VSU. Series. Problems of higher education*. 2016. No 1. 66-72.
5. Pentsak Ye., Yurchyshyn A. Funktsionalni rivniannia [Functional equations.]. Lviv: LDU. 1998.
6. Semenets S.P. Funktsionalni rivniannia yak zasib vvedennia elementarnykh funktsii u kursi alhebr y i pochatkiv analizu [Functional equations as a means of introducing elementary functions in the course of algebra and the beginnings of analysis. o]. *Visn. Zhytomyr. derzh. un-tu im. I. Franka – Visn. Zhytomyr. state University named after I. Frank*. 1999. №3, 34-36.
7. Smirnov E. Fundirovanie kak metodologija i innovacionnyj mehanizm professional'nogo stanovlenija pedagoga [Funding as a methodology and an innovative mechanism for the professional development of a teacher.]. In *Mezhdunarodnyj internet-simpozium SWorld "Perspektivnye innovacii v nauke, obrazovanii, proizvodstve i transporte"*-Pedagogika, psihologija i sociologija. 2013. 5-17.
8. Shyshenko I., Lukashova T., Strakh O. Funduvannia znan u protsesi vyvchennia matematychnykh poniat zasobamy tsyfrovyykh tekhnolohii u fakhovii pidhotovtsi maibutnikh uchyteliv matematyky [Foundation of knowledge in the process of studying mathematical concepts by means of digital technologies in professional training of future teachers of mathematics.]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and mathematical education*, 2022, №32(6), 57–63. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2021-032-6-009>.