



”

Ізюмченко Л. Пошуки різних способів розв'язування задач як каталізатор особистісного зростання учнів. *Освіта. Інноватика. Практика*, 2025. Том 13, № 3. С. 30-36. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol13i3-005>.

Iziumchenko L. Poshuky riznykh sposobiv rozv'iazuvannia zadach yak katalizator osobystnoho zrostantia uchniv [Exploring diverse problem-solving approaches as a catalyst for students' personal growth]. *Osvita. Innovatyka. Praktyka – Education. Innovation. Practice*, 2025. Vol. 13, No 3. S. 30-36. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol13i3-005>.

УДК 317.512

DOI: 10.31110/2616-650X-vol13i3-005

Людмила ІЗЮМЧЕНКО

Лицей «Престиж», м. Київ, Україна

<https://orcid.org/0000-0001-8656-2220>

l.iziumch@gmail.com

ПОШУКИ РІЗНИХ СПОСОБІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЯК КАТАЛІЗАТОР ОСОБИСТІСНОГО ЗРОСТАННЯ УЧНІВ

Анотація. Світ, що постійно змінюється, вимагає від нас здатності швидко адаптуватися до нових умов та ефективно вирішувати проблеми. Сучасні реалії ставлять перед нами завдання, які вимагають гнучкості мислення та здатності бачити проблему з різних ракурсів. Ще зі шкільної лави варто розвивати в учнів уміння шукати альтернативні рішення, висувати гіпотези та будувати логічні аргументи. Розв'язування геометричних задач різними методами є ефективним способом досягнення цієї мети, при цьому учні вчаться аналізувати умови, висувати гіпотези та обґрунтовувати свої висновки, що є важливими навичками для будь-якої сфери діяльності. Кожен новий підхід не тільки розкриває нові грані задачі, але й сприяє глибокому розумінню математичних понять та розвиває критичне мислення. У статті автор ділиться практикою роботи у класах математичного профілю, зокрема розкриваються методичні аспекти роботи з учнями на прикладі пошуків розв'язання геометричної задачі; у роботі розглянута одна стереометрична задача та наведено п'ять різних способів її розв'язання. Кожен новий спосіб ґрунтується на використанні знань з різних розділів геометрії, серед них: відшукування кута між площинами за означенням; з використанням теореми про три перпендикуляри; із застосуванням методу ортогональних проекцій; із використанням теореми косинусів для тригранного кута та методу координат; при цьому використані тригонометричні співвідношення, елементи векторної алгебри, рівняння площини у відрізках, окремі випадки розташування площини, зокрема умови паралельності площини до координатної осі, скалярний добуток векторів; використано метод площ; відзначено, які базові знання лежать в основі кожного із способів розв'язання, у тому числі теорема Піфагора, косинусів, подібність трикутників, умови перпендикулярності прямої і площини. Окрема увага приділена дослідженню взаємного розташування точок на відрізку; підібрано початкову умову з метою отримання табличного значення кута між площинами; усі способи розв'язання містять повне теоретичне обґрунтування і необхідні обчислення. У статті підкреслено, наскільки важливо вчити учнів шукати різні підходи до розв'язання геометричних задач. Такий підхід не лише поглиблює розуміння геометричних понять, а й сприяє всебічному розвитку їхніх логічних та критичних здібностей, готуючи їх до успішного розв'язання складних математичних завдань. Це вміння є ключовим для успішного застосування математичних знань у подальшому житті та професійній діяльності.

Ключові слова: кут між площинами; теорема косинусів для тригранного кута; метод координат; метод площ; критичне мислення.

Liudmyla IZIUMCHENKO

Lyceum Prestige, Kyiv, Ukraine

<https://orcid.org/0000-0001-8656-2220>

l.iziumch@gmail.com

EXPLORING DIVERSE PROBLEM-SOLVING APPROACHES AS A CATALYST FOR STUDENTS' PERSONAL GROWTH

Abstract. Our rapidly changing world demands that we adapt quickly to new circumstances and effectively solve problems. Contemporary realities present us with challenges that require flexible thinking and the ability to view problems from multiple perspectives. From an early age, it is crucial to cultivate in students the skills of seeking alternative solutions, formulating hypotheses, and constructing logical arguments. Solving geometric problems using various methods is an effective way to achieve this goal. In this process, students learn to analyze conditions, propose hypotheses, and justify their conclusions, which are essential skills for any field of activity. Each new approach not only reveals new facets of the problem but also contributes to a deep understanding of mathematical concepts and develops critical thinking. In this article, the author shares their experience working with mathematics-oriented classes, specifically highlighting the methodological aspects of working with students using the example of finding a solution to a geometric problem. The article examines one stereometric problem and presents five different ways to solve it. Each new method is based on the use of knowledge from various sections of geometry, including finding the angle between planes by definition, using the theorem of three perpendiculars, applying the method of orthogonal projections, using the cosine theorem for a trihedral angle and the coordinate method; while using trigonometric ratios, elements of vector algebra, the equation of a plane in segments, and specific cases of the plane's position, in particular, the conditions of parallelism of the plane to the coordinate axis, the scalar product of vectors; the method of areas. The article notes which basic knowledge underlies each solution method, including the Pythagorean theorem, the cosine theorem, the similarity of triangles, and the conditions of perpendicularity of a straight line and a plane. Particular attention is paid to studying the mutual arrangement of points on a segment; an initial condition is selected to obtain a tabular value of the angle between planes; all solution methods contain a complete theoretical justification and necessary calculations. The article emphasizes the importance of teaching students to seek different approaches to solving geometric problems. Such an approach not only deepens the understanding of geometric concepts but also contributes to the all-round development of their logical and critical abilities, preparing them for the successful solution of complex mathematical problems. This skill is key to successfully applying mathematical knowledge in future life and professional activities.

Keywords: angle between planes; cosine theorem for a trihedral angle; coordinate method; area method; critical thinking.

Постановка та обґрунтування актуальності проблеми. Сучасний світ насичений значною кількістю проблем, він вимагає від нас здатності швидко адаптуватися до нових умов та ефективно вирішувати проблеми. Сьогодення ставить перед нами завдання, які вимагають гнучкості мислення та здатності бачити проблему з різних ракурсів. Щоб підготувати молодь до таких викликів, необхідно формувати в них навички аналітичного мислення та пошуку нестандартних рішень ще зі шкільної парти, варто розвивати в учнів уміння шукати альтернативні рішення, висувати гіпотези та вибудовувати логічні аргументи. Математика, зокрема геометрія, пропонує широкі можливості для розвитку цих компетентностей. Розв'язуючи геометричні задачі різними способами, учні вчаться аналізувати умови, висувати гіпотези та обґрунтовувати свої висновки, що є важливими навичками для будь-якої сфери діяльності. Кожен новий підхід не тільки розкриває нові грані задачі, але й сприяє глибокому розумінню математичних понять та розвиває критичне мислення. Пошук альтернативних рішень – це складний процес, який залучає багато різних когнітивних функцій: спочатку учень сприймає проблему як таку, що потребує вирішення, при цьому прагне встановити ключові елементи задачі, взаємозв'язки між ними та обмеження; далі учень має сконцентрувати свою увагу на актуальній інформації, відфільтровуючи непотрібні деталі, що допомагає зосередитися на пошуку можливих рішень. При цьому у своїй пам'яті шукаються попередній досвід, знання та стратегії, які можуть бути корисними для вирішення поточної проблеми; під час розв'язання учень розбиває задачу на підзадачі, аналізує кожну з них окремо і визначає їхні взаємозв'язки; утримує в своїй пам'яті різні варіанти розв'язань, порівнює їх між собою та оцінює їхню доцільність; об'єднує різні елементи розв'язання в нові комбінації, створюючи нові ідеї та варіанти рішень, обираючи найкраще. Обговорюючи та шукаючи альтернативні рішення у групі, учні вчаться ефективно співпрацювати, вислуховувати думки інших і відстоювати, аргументувати свою точку зору, чути інших та знаходити компроміси, придумувати нестандартні підходи до розв'язання поставленої задачі.

У даній статті ми ділимося власним досвідом роботи у класах фізико-математичного профілю та звертаємо увагу на різні методи розв'язування однієї і тієї ж стереометричної задачі, оскільки вважаємо, що це якнайкраще сприяє критичності мислення, інтелектуальному розвитку та підвищенню освітнього рівня, а отже і особистісному зростанню учнів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Науковці, методисти і педагоги-практики досліджували різні аспекти математичної підготовки учнів і студентів фізико-математичних факультетів педагогічних вишів: формування творчої особистості школяра, розвиток творчого мислення учня у процесі навчання математики розглядали Бевз Г.П., Бурда М.І., Скафа О.І., Слєпкань З.І., Хмара Т.М., Чашечникова О.С. та ін.; забезпечення наступності навчання математичних дисциплін, навчально-дослідницьку діяльність учнів/студентів вивчали Акуленко І.А. [7], Бевз В.Г., Ботузова Ю.В. [1], Владімірова Н.Г., Гнезділова К.М., Кузьмінський А.І., Швець В.О. та ін.; інноваційну діяльність при профільному вивченні математики та геометричну складову нестандартних задач розглядали Бевз Г.П., Богатирьова І.М., Вашуленко О.П., Ленчук І.Г., Макаруч О.П., Матяш О.І., Палій Л.О. [10], Працьовитий М.В. [9], Ріжняк Р.Я. [8], Сердюк З.О., Тарасенкова Н.А. [7] та ін.; відшукуванню різних способів розв'язування геометричних задач присвячені роботи Бевз В.Г., Жалдака М.І., Зеленька О.П. [3; 4], Ігнатенко М.Я. [5], Ізюмченко Л.В., Істера О.С., Коломієць О.М., Полонського В.Б. [11], Рабіновича Ю.М., Ткачевської А.П. [6], Якіра М.С. [11] та ін.; критичності мислення і важливості перевірки отриманих результатів та оцінці відповідності отриманих розв'язків стартовій математичній моделі присвячені роботи Барболіної О.С., Голодюк Л.С. [2], Ізюмченко Л.В., Кушніра В.А. [8], Філера З.Ю. та ін.

Незважаючи на значну кількість досліджень, присвячених організації освітньої діяльності учнів, у сучасній науково-методичній літературі недостатньо досліджена геометрична складова роботи зі школярами, які вивчають математику на профільному рівні, у тому числі і питання розв'язування задач різними способами, особливо при вивченні стереометрії, та їхній вплив на розвиток критичного мислення, природних здібностей та обдарувань учнів, а тому ця тема потребує подальшого дослідження.

Метою статті є системний розгляд та порівняння різних методів розв'язання однієї стереометричної задачі, що сприятиме розвитку гнучкості мислення та формуванню в учнів навичок пошуку різних варіантів знаходження правильної відповіді, а також слугуватиме каталізатором особистісного розвитку школярів.

Завдання: розглянути методичні аспекти роботи з учнями фізико-математичних класів на прикладі пошуків розв'язання однієї задачі.

Методи дослідження. Для реалізації поставленої мети та виконання завдань статті використано теоретичні (аналіз першоджерел з проблеми дослідження, порівняння, формалізації, абстрагування), праксиметричні (вивчення педагогічного досвіду вчителів математики для його аналізу й узагальнення), емпіричні (педагогічне спостереження, аналіз навчального процесу) методи дослідження.

Виклад основного матеріалу дослідження. У десятому класі фізико-математичного профілю вивчається, зокрема, і теорема косинусів для тригранного кута. Проілюструємо її застосування на прикладі наступної задачі.

Задача. У прямокутному паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро AB дорівнює 2 см, ребро AD дорівнює $\sqrt{39}$ см, а ребро AA_1 дорівнює 3 см. Знайдіть кут між площинами $AB_1 D$ і $CB_1 D$.

1 спосіб. Використання теореми косинусів для тригранного кута.

Очевидно, що площини $AB_1 D$ і $CB_1 D$ перетинаються по прямої $B_1 D$.

З $\triangle ABB_1$, $\angle ABB_1 = 90^\circ$, за теоремою Піфагора отримаємо $B_1 A = \sqrt{13}$ см; аналогічно, з $\triangle CBB_1$, $\angle CBB_1 = 90^\circ$, $B_1 C = 4\sqrt{3}$ см; з $\triangle B_1 CD$, $\angle B_1 CD = 90^\circ$, $B_1 D = 2\sqrt{13}$ см, з $\triangle ABC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AC = \sqrt{43}$ см (рис. 1).

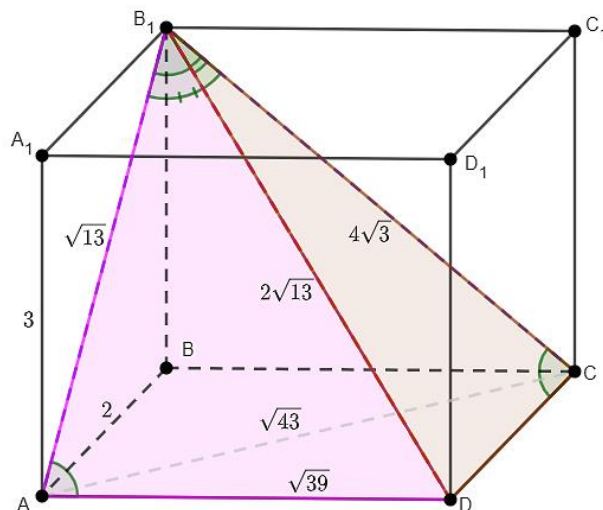


Рис. 1. Ілюстрація до умови задачі

Розглянемо тригранний кут, утворений $B_1 A$, $B_1 D$ і $B_1 C$. Нас цікавить двогранний кут при ребрі $B_1 D$. Визначимо тригонометричні функції плоских кутів при вершині тригранного кута: з прямокутного трикутника $\triangle B_1 AD$:

$$\cos \angle AB_1 D = \frac{AB_1}{B_1 D} = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{13}} = \frac{1}{2}; \quad \sin \angle AB_1 D = \frac{AD}{B_1 D} = \frac{\sqrt{39}}{2\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Аналогічно, з $\triangle B_1 CD$:

$$\cos \angle CB_1 D = \frac{CB_1}{B_1 D} = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}; \quad \sin \angle CB_1 D = \frac{CD}{B_1 D} = \frac{2}{2\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Третя грань тригранного кута $\triangle B_1 CA$ не є прямокутним трикутником, тому застосуємо теорему косинусів:

$$\cos \angle AB_1 C = \frac{AB_1^2 + B_1 C^2 - AC^2}{2AB_1 \cdot B_1 C} = \frac{(\sqrt{13})^2 + (4\sqrt{3})^2 - (\sqrt{43})^2}{2 \cdot \sqrt{13} \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{13}}.$$

Запишемо теорему косинусів для тригранного кута:

$$\cos \angle AB_1 C = \cos \angle AB_1 D \cdot \cos \angle CB_1 D + \sin \angle AB_1 D \cdot \sin \angle CB_1 D \times \cos \angle (AB_1 D; CB_1 D).$$

Звідки косинус двогранного кута:

$$\begin{aligned} \cos \angle (AB_1 D; CB_1 D) &= \frac{\cos \angle AB_1 C - \cos \angle AB_1 D \cdot \cos \angle CB_1 D}{\sin \angle AB_1 D \cdot \sin \angle CB_1 D}; \\ \cos \angle (AB_1 D; CB_1 D) &= \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{13}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}} = \frac{4\sqrt{13} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{13}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \right)}{4\sqrt{13} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \right)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Двогранний кут між півплощинами тупий, а кут між площинами гострий, він дорівнює $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$.

Наведемо інші способи розв'язання цієї задачі.

2 спосіб. З використанням теореми про три перпендикуляри.

Розглянемо досліджувані площини у вигляді перерізів даного прямокутного паралелепіпеда, тобто прямокутників $A_1 B_1 C_1 D_1$ і $AB_1 C_1 D_1$, та лінію їхнього перетину $B_1 D$ (рисунок 2), врахуємо обчислення, нанесені на рисунку 1.

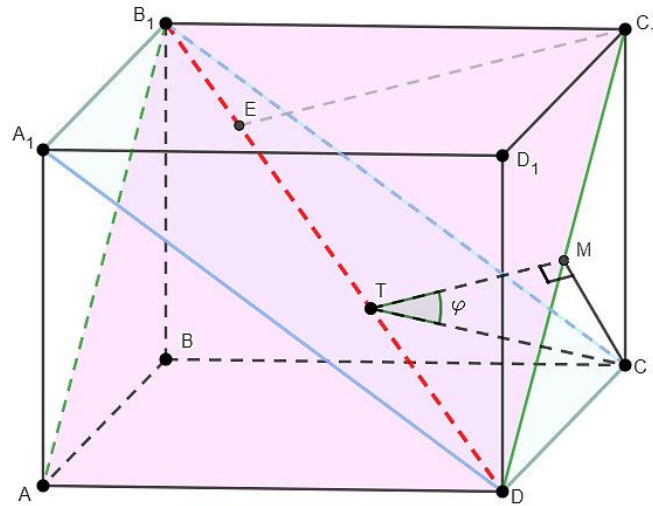


Рис. 2. Побудова кута між площинами з використанням ТТП

Для побудови кута між площинами виберемо у одній із двох площин будь-яку точку, наприклад C у площині A_1B_1CD ; із цієї точки опустимо на іншу площину перпендикуляр (CM), а із основи перпендикуляра (точки M) опустимо перпендикуляр (MT) на лінію перетину двох площин (B_1D). Тоді за теоремою про три перпендикуляри (ТТП) кут CTM – шуканий.

Обґрунтуємо усі кроки. У площині DCC_1D_1 проведемо відрізок $CM \perp C_1D$. Далі, оскільки паралелепіпед – прямокутний, то $B_1C_1 \perp DCC_1D_1$, а тому B_1C_1 перпендикулярний до усіх прямих цієї площини, зокрема і до CM . Маємо $\begin{cases} CM \perp B_1C_1, \\ CM \perp C_1D, \\ B_1C_1 \cap C_1D \end{cases}$ (якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються, площини, то вона перпендикулярна до цієї площини): $CM \perp AB_1C_1D$. З точки M у площині AB_1C_1D опускаємо перпендикуляр MT на пряму B_1D цієї площини; кут CTM – шуканий.

Обчислення: $\triangle CC_1D$, CM – висота, проведена на гіпотенузу, $h = \frac{a \cdot b}{c}$, $CM = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$ см.
 $DM = \sqrt{CD^2 - CM^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{6}{\sqrt{13}}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{13}}$ см.

З прямокутного трикутника B_1C_1D висота $C_1E = \frac{B_1C_1 \cdot C_1D}{B_1D} = \frac{\sqrt{39} \cdot \sqrt{13}}{2\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{39}}{2}$ см.

$C_1E \parallel MT$ (як два перпендикуляри до однієї прямої), маємо подібні трикутники

$$\triangle DMT \sim \triangle DC_1E, k = \frac{DM}{DC_1} = \frac{4}{13}, MT = k \cdot C_1E = \frac{4}{13} \cdot \frac{\sqrt{39}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}.$$

Оскільки $CM \perp AB_1C_1D$, то вона перпендикулярна до усіх прямих цієї площини, зокрема і до MT .

А тоді

$$\operatorname{tg} \angle MTC = \frac{CM}{MT} = \frac{6}{\sqrt{13}} : \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \angle MTC = \arctg(\sqrt{3}) = 60^\circ.$$

3 спосіб. Метод ортогональних проєкцій.

Спроекуємо трикутник B_1CD на площину B_1C_1D : точки B_1 і D спроектуються самі в себе; у попередньому способі ми довели, що $CM \perp B_1C_1D$, а тому проєкцією точки C на площину B_1C_1D є точка M , а усього трикутника B_1CD на площину B_1C_1D є трикутник B_1MD . Їхні площі:

$$S_F = S(\triangle B_1CD) = \frac{1}{2} B_1C \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2 = 4\sqrt{3} \text{ см}^2 \text{ або } S_F = \frac{1}{2} B_1D \cdot C_1E;$$

$$S_{pr} = S(\triangle B_1MD) = \frac{1}{2} B_1D \cdot MT = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

А тоді косинус кута між площинами є відношенням площі S_{pr} ортогональної проєкції до площі S_F фігури: $\cos \varphi = \frac{S_{pr}}{S_F} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$.

4 спосіб. За означенням кута між площинами.

Обчислимо кут між площинами за означенням кута між двома площинами, для чого у кожній з площин опустимо перпендикуляри на лінію їхнього перетину: $AF \perp B_1D$, $CT \perp B_1D$ (рис. 3).

BB_1 – перпендикуляр до площини $ABCD$, AD – пряма цієї площини, AB_1 – похила, AB – її проєкція на площину $ABCD$, $AB \perp AD$, то за теоремою про три перпендикуляри $AB_1 \perp AD$, тобто $\triangle B_1AD$ – прямокутний, $\angle B_1AD = 90^\circ$; AF – висота, проведена на гіпотенузу, $h = \frac{a \cdot b}{c}$, $AF = \frac{\sqrt{13} \cdot \sqrt{39}}{2\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{39}}{2}$ см.

Аналогічно, з прямокутного трикутника $\triangle B_1CD$ знайдемо висоту $CT = \frac{2 \cdot 4\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{39}}{13}$ см.

Оцінимо розташування точок F і T на відрізку B_1D , для чого знайдемо FD і TD : $a_c = \frac{a^2}{c}$, $FD = \frac{AD^2}{B_1D}$, $FD = \frac{(\sqrt{39})^2}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$; $TD = \frac{CD^2}{B_1D}$, $TD = \frac{2^2}{2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ (або за теоремою Піфагора, наприклад, з прямокутних трикутників AFD та CTD), $FD > TD$, уточнюємо рисунок.

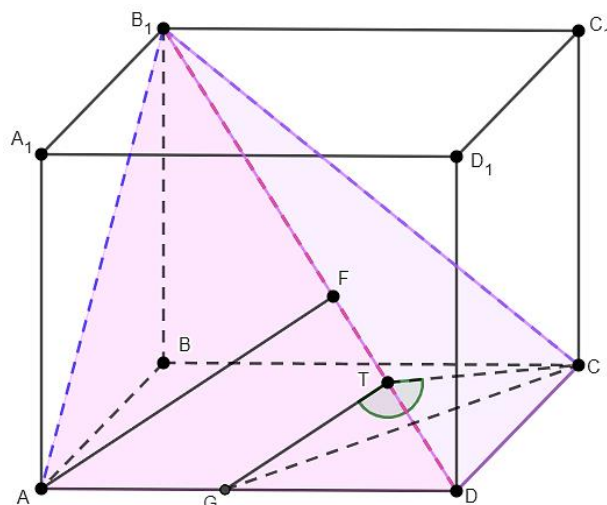


Рис. 3. Побудова кута між площинами за означенням

Перенесемо (паралельно) перпендикуляр AF у точку T , отримаємо відрізок TG . Тоді кут CTG (або суміжний з ним) є кутом між двома площинами за означенням.

Обчислимо довжину відрізка TG . Трикутники DGT і DAF подібні, коефіцієнт подібності: $k = \frac{DT}{DF} = \frac{2\sqrt{13}}{13} : \frac{3\sqrt{13}}{2} = \frac{4}{39}$, звідки $GT = \frac{4}{39}AF = \frac{4}{39} \cdot \frac{\sqrt{39}}{2} = \frac{2}{\sqrt{39}}$ см, $DG = \frac{4}{39}DA = \frac{4}{39} \cdot \sqrt{39} = \frac{4}{\sqrt{39}}$ см. З трикутника CDG отримаємо $CG = \sqrt{GD^2 + DC^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{39}}\right)^2 + 2^2} = \frac{2\sqrt{43}}{\sqrt{39}}$ см.

Тоді шуканий кут знаходимо за теоремою косинусів із трикутника CTG :

$$\cos \angle CTG = \frac{CT^2 + TG^2 - CG^2}{2CT \cdot TG};$$

$$\cos \angle CTG = \frac{\left(\frac{4\sqrt{39}}{13}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{39}}{39}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{43}}{\sqrt{39}}\right)^2}{2 \cdot \frac{4\sqrt{39}}{13} \cdot \frac{2\sqrt{39}}{39}} = \frac{\frac{48}{13} + \frac{4}{39} - \frac{172}{39}}{\frac{16}{13}} = \frac{39 \cdot \left(\frac{48}{13} + \frac{4}{39} - \frac{172}{39}\right)}{39 \cdot \frac{16}{13}} = \frac{-24}{48} = -\frac{1}{2}.$$

Оскільки косинус отриманого кута від'ємний, то цей кут є тупим, тоді кут між площинами є суміжним до даного, він дорівнює $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60$.

5 спосіб. Метод координат.

Виберемо систему координат, як показано на рисунку 4, тобто помістивши одну із вершин (B) прямокутного паралелепіпеда у початок координат, а вісі координат напрямимо уздовж ребер, які виходять із цієї вершини. Тоді координати усіх вершин $B(0;0;0)$, $A(2;0;0)$, $C(0;\sqrt{39};0)$, $D(2;\sqrt{39};0)$, $A_1(2;0;3)$, $B_1(0;0;3)$, $C_1(0;\sqrt{39};3)$, $D_1(2;\sqrt{39};3)$.

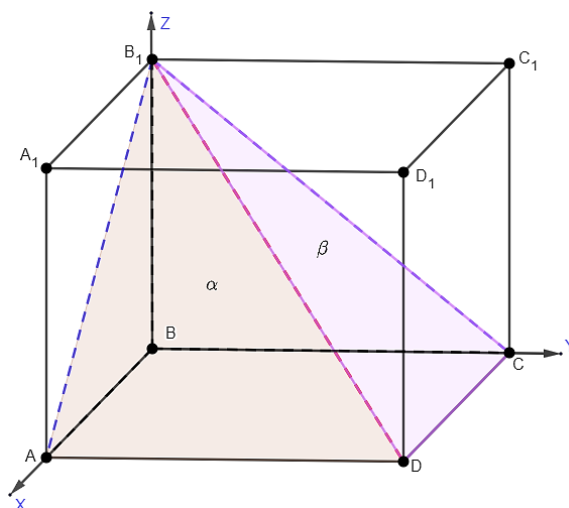


Рис. 4. Вибір системи координат

Рівняння площини у відрізках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Якщо площина паралельна до якоїсь вісі, то коефіцієнт при відповідній змінній дорівнює нулю. Площина $\alpha = (AB_1D)$ відтинає на вісі абсцис відрізок $a = 2$, на вісі аплікату відрізок $c = 3$, і паралельна до вісі ординат ($AD \parallel BC \subset Oy$). А тому рівняння площини (AB_1D) : $\frac{x}{2} + \frac{z}{3} = 1$; $3x + 2z = 6$, нормальний вектор площини $\vec{n}_1 = (3; 0; 2)$. Площина $\beta = (CB_1D)$ відтинає на вісі ординат відрізок $b = \sqrt{39}$, на вісі аплікату відрізок $c = 3$, і паралельна до вісі абсцис ($CD \parallel AB \subset Ox$).

Рівняння площини (CB_1D) : $\frac{y}{\sqrt{39}} + \frac{z}{3} = 1$; $3y + \sqrt{39}z = 3\sqrt{39}$, нормальний вектор площини $\vec{n}_2 = (0; 3; \sqrt{39})$.

Використовуючи скалярний добуток векторів, отримаємо (гострий) кут:

$$\begin{aligned} \cos \angle (AB_1D; CB_1D) &= |\cos \angle (\vec{n}_1; \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \\ &= \frac{|(3; 0; 2) \cdot (0; 3; \sqrt{39})|}{|(3; 0; 2)| \cdot |(0; 3; \sqrt{39})|} = \frac{3 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot \sqrt{39}}{\sqrt{3^2 + 0 + 2^2} \cdot \sqrt{0 + 3^2 + 39}} = \frac{2\sqrt{39}}{\sqrt{13} \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Відповідь: 60° .

Висновки. Розв'язування однієї задачі кількома способами демонструє різноманітність підходів до вирішення проблеми та глибину розуміння поставленої задачі; шукаючи альтернативні рішення, учні вчаться аналізувати, порівнювати та оцінювати різні методи, що сприяє розвитку їхнього критичного мислення. При цьому відбувається ефективний самоконтроль та перевірка отриманих результатів, які формують у учнів почуття відповідальності за свою роботу та підвищують їхню впевненість у власних силах. Така методика організації навчання не лише поглиблює розуміння геометричних понять, а й сприяє всебічному розвитку логічних та критичних здібностей школярів, готуючи їх до успішного розв'язання складних математичних завдань. Це вміння є ключовим для успішного застосування математичних знань у подальшому житті та професійній діяльності, а отже є критично важливим для особистісного зростання школяра.

Вважаємо, що дослідження альтернативних способів розв'язування геометричних задач є перспективним напрямком для подальшої роботи і що наш досвід може бути корисним для інших вчителів, які працюють у профільних класах, та студентів фізико-математичних факультетів педагогічних вишів.

Список використаних джерел

1. Botuzova Y.V. Factors of providing the continuity of teaching mathematics during transition from high school to university. *Universal Journal of Educational Research*, 8(3), 2020. P. 857-865.
2. Голодюк Л.С. Формування та розвиток конструктивних умінь учнів у процесі навчання математики. *Наукові записки. Серія: проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти*, 1(5), Кіровоград: КДПУ ім. В. Винниченка, 2016. С.18-24.
3. Зеленьяк О.П. Решение задач по планиметрии. Технология алгоритмического подхода на основе задач-теорем. Моделирование в среде Turbo Pascal. *Учебное пособие*. Киев, Москва: ДияСофтЮП, ДМК Пресс, 2008. 336 с.
4. Зеленьяк О.П. Технології розв'язування геометричних задач. *Наукові записки. Серія: математичні науки*, (71), Кіровоград: КДПУ ім. В. Винниченка. 2016, С. 27-46.
5. Ігнатенко М.Я., Кобко Л.М. Одна геометрична задача крізь різні розділи. *Математика в сучасній школі*, 4, 2013. С. 4-8.
6. Ізюмченко Л.В., Ткачевська А.П. Різні способи розв'язування задач як інструмент формування гнучкості мислення (на прикладі геометричної задачі). *Освіта. Інноватика. Практика*, 2023. Том 11, № 9. С. 48-54. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol11i9-007>
7. Кузьмінський А., Тарасенкова Н., & Акуленко І. Інновації в методології методичної підготовки майбутнього вчителя математики профільної школи. *Educational Dimension*, 40, 2014. С. 3-9.
8. Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я. Інтеграція математичних знань та умінь при використанні різних способів розв'язування задач. *Постметодика*, (2), 2010. С. 24-31.
9. Ленчук І.Г., Працьовитий М.В. Основні метричні задачі конструктивної стереометрії. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*, 64, 2022. С. 243-257.
10. Палій Л.О. Функції і роль стереометричної задачі у процесі формування знань та умінь учнів з геометрії. *Modern Information Technologies and Innovation Methodologies of Education in Professional Training Methodology Theory Experience Problems*, (36), 2013. С. 38-43.
11. Полонський В.Б., Рабінович Ю.М., Якір М.С. Вчимося розв'язувати задачі з геометрії. *Навчально-методичний посібник*. Тернопіль: Підручники і посібники. 2002. 240 с.

References

1. Botuzova Y.V. Factors of providing the continuity of teaching mathematics during transition from high school to university. *Universal Journal of Educational Research*, 8(3), 2020. P. 857-865.

2. Holodiuk L.S. Formuvannia ta rozvytok konstruktivnykh umin uchniv u protsesi navchannia matematyky. *Naukovi zapysky. Serii: problemy metodyky fizyko-matematychnoi i tekhnolohichnoi osvity*, 1(5), Kirovohrad: KDPU im. V. Vynnychenka, 2016. S.18-24.
3. Zeleniak O.P. *Reshenye zadach po planymetrii. Tekhnolohiya alhorytmicheskogo podkhoda na osnove zadach-teorem. Modelyrovanye v srede Turbo Pascal*. Uchebnoe posobie. Kyev, Moskva: DyaSoftIuP, DMK Press, 2008. 336 s.
4. Zeleniak O.P. Tekhnolohii rozv'iazuvannia heometrychnykh zadach. *Naukovi zapysky. Serii: matematychni nauky*, (71), Kirovohrad: KDPU im. V. Vynnychenka. 2016, S. 27-46.
5. Ihnatenko M.Ya., Kobko L.M. Odnа heometrychnа zadachа kriz rizni rozdily. *Matematyka v suchasni shkoli*, 4, 2013. S. 4-8.
6. Iziumchenko L.V., Tkachevska A.P. Rizni sposoby rozv'iazuvannia zadach yak instrument formuvannia hnuchkosti myslennia (na prykladi heometrychnoi zadachi). *Osvita. Innovatyka. Praktyka*, 2023. Tom 11, № 9. S. 48-54. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol11i9-007>.
7. Kuzminskyi A., Tarasenkova N., & Akulenko I. Innovatsii v metodolohii metodychnoi pidhotovky maibutnoho vchytelia matematyky profilnoi shkoly. *Educational Dimension*, 40, 2014. S. 3-9.
8. Kushnir V.A., Rizhniak R.Ya. Intehratsiia matematychnykh znan ta umin pry vykorystanni riznykh sposobiv rozv'iazuvannia zadach. *Postmetodyka*, (2), 2010. S. 24-31.
9. Lenchuk I.H., Pratsovytyi M.V. Osnovni metrychni zadachi konstruktivnoi stereometrii. *Suchasni informatsiini tekhnolohii ta innovatsiini metodyky navchannia u pidhotovtsi fakhivtsiv: metodolohiia, teoriia, dosvid, problemy*, 64, 2022. S. 243-257.
10. Palii L.O. Funktsii i rol stereometrychnoi zadachi u protsesi formuvannia znan ta vmin uchniv z heometrii. *Modern Information Technologies and Innovation Methodologies of Education in Professional Training Methodology Theory Experience Problems*, (36), 2013. S. 38-43.
11. Polonskyi V.B., Rabinovych Yu.M., Yakir M.S. *Vchymosia rozv'iazuvaty zadachi z heometrii*. Navchalno-metodychnyi posibnyk. Ternopil: Pidruchnyky i posibnyky. 2002. 240 s.