



Ізюмченко Л., Ткачевська А. Різні способи розв'язування задач як інструмент формування гнучкості мислення (на прикладі геометричної задачі). *Освіта. Інноватика. Практика*, 2023. Том 11, № 9. С. 48-54. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol11i9-007>

Iziumchenko L., Tkachevska A. Rizni sposoby rozv'iazuvannia zadach yak instrument formuvannia hnuchkosti myslennia (na pryklady heometrychnoi zadachi) [Different ways of solving problems as a tool for forming flexibility of thinking (on the example of a geometric problem)]. *Osvita. Innovatyka. Praktyka – Education. Innovation. Practice*, 2023. Vol. 11, No 9. S. 48-54. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol11i9-007>

УДК 317.512

DOI: 10.31110/2616-650X-vol11i9-007

Людмила ІЗЮМЧЕНКО

Лицей «Престиж», м. Київ, Україна

<https://orcid.org/0000-0001-8656-2220>

liziumch@gmail.com

Анна ТКАЧЕВСЬКА

Національний технічний університет України «Київський політехнічний

інститут імені Ігоря Сікорського, Україна

tkannochka@gmail.com

РІЗНІ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЯК ІНСТРУМЕНТ ФОРМУВАННЯ ГНУЧКОСТІ МИСЛЕННЯ (НА ПРИКЛАДІ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ)

Анотація. Сучасний світ насичений великою кількістю проблем, що потребують швидких дій і наявності декількох шляхів до їхнього успішного розв'язання. Важливо ще зі школи формувати в учнів навички пошуку альтернативних варіантів знаходження правильної відповіді, висування й обґрунтування певних припущень, побудови фрагментарних теоретичних узагальнень. Розвиткові цих навичок особливо сприяє розв'язування геометричних задач різними способами, адже кожен новий спосіб розкриває цю задачу з іншого боку, показує її глибинні властивості, спонукає учнів аналізувати умову задачі, знаходити можливі шляхи до її розв'язання, застосовуючи при цьому знання з різних розділів математики. Крім того, розв'язування задачі декількома способами підвищує гарантію правильності отриманої відповіді. У статті автори діляться практикою роботи у класах математичного профілю, зокрема розкриваються методичні аспекти роботи з учнями на прикладі пошуку розв'язання геометричної задачі, – у роботі розглянута одна геометрична задача та наведено десять різних способів її розв'язання. Кожен новий спосіб ґрунтується на використанні знань з різних розділів математики, серед них: тригонометричні співвідношення (окрема увага приділена використанню основної тригонометричної тотожності, формулам косинуса і синуса суми), геометричні перетворення (показані у вигляді побудови подібних трикутників та осової симетрії); різні типи рівнянь та нерівностей; застосовані метод площ, метод координат та метод оцінки; описані особливості використання кожного з них та їхня доцільність; відзначено, які базові знання лежать в основі кожного із способів розв'язання, у тому числі, теореми косинусів, синусів, Піфагора, формула бісектриси, її властивість та інші; окрема увага приділена дослідженню виду даного трикутника, детально описані усі кроки та обґрунтовано, які з трикутників є можливими за умов даної задачі. Також розглянута узагальнена версія початкової задачі, прокоментовані її особливості, а також зазначено, які способи серед наведених у першій задачі можуть бути використані для розв'язування другої. У статті робиться акцент на важливості і доцільності пошуку різних способів розв'язування геометричних задач під час вивчення геометрії у класах математичного профілю та відзначається вплив такої практики організації освітнього процесу на розвиток логічного, критичного мислення та підвищення математичної освіченості школярів.

Ключові слова: критичне мислення; тригонометричні співвідношення; методи перетворення (подібності, осової симетрії); метод координат; метод площ; метод оцінки розв'язування геометричних задач.

Liudmyla IZIUMCHENKO

Lyceum Prestige, Kyiv, Ukraine

<https://orcid.org/0000-0001-8656-2220>

liziumch@gmail.com

Anna TKACHEVSKA

National Technical University of Ukraine

"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine

tkannochka@gmail.com

DIFFERENT WAYS OF SOLVING PROBLEMS AS A TOOL FOR FORMING FLEXIBILITY OF THINKING (ON THE EXAMPLE OF A GEOMETRIC PROBLEM)

Abstract. The modern world is full of many problems that require quick action and several ways to successfully solve them. It is important to develop in students the skills of searching for alternative options for finding the correct answer, making and validating certain assumptions, and building fragmentary theoretical generalisations. The development of these skills is especially facilitated by solving geometric problems in different ways, because each new way reveals the problem from a different angle, shows its deep properties, encourages students to analyse the condition of the problem, find possible ways to solve it, while applying knowledge from different areas of mathematics. In addition, solving a problem in several ways increases the guarantee of the correctness of the answer. In the article, the authors share their practice of working in mathematics classes, in particular, they reveal the methodological aspects of working with students on the example of finding a solution to a geometric problem - the paper considers one geometric problem and provides ten different ways to solve it. Each new method is based on the use of knowledge from different areas of mathematics, including: trigonometric relations (special attention is paid to

the use of the basic trigonometric identity, the formulas of cosine and sine of the sum), geometric transformations (shown as the completion of similar triangles and axial symmetry); different types of equations and inequalities; applied the method of areas, the method of coordinates and the method of estimation; described the features of using each of them and the feasibility of such use; noted what basic knowledge underlies each of the methods of solving, including the theorems of cosines, sines, Pythagoras, the bisector formula, its property and others; special attention is paid to the study of the type of a given triangle, all the steps of the study are described in detail and it is substantiated which triangles are possible under the conditions of a given problem and which do not satisfy it. A generalised version of the original problem is also considered, its features are commented on, and it is indicated which methods among those given in the first problem can be used to solve the second. The article emphasises the importance and feasibility of finding different ways of solving geometric problems in the course of studying geometry in mathematics classes and notes the impact of such a practice of organising the educational process on the development of logical and critical thinking and improving the mathematical education of students.

Keywords: critical thinking; trigonometric ratios; methods of transformation (similarity, axial symmetry); method of coordinates; method of areas; method of evaluation of solving geometric problems.

Постановка та обґрунтування актуальності проблеми. У сучасному світі, де застосування техніки для вирішення повсякденних завдань зазнає все більшого поширення, все важливішими і актуальнішими стають навички критичного мислення та оптимізації будь-яких процесів. Отже, все необхіднішими стають знання з математики, що, безумовно, приводить до зміни пріоритетів шкільної освіти. Розв'язування задач є одним з основних інструментів навчання дітей математики, адже задачі спонукають учнів до висування й обґрунтування певних припущень, побудови фрагментарних теоретичних узагальнень, сприяючи в такий спосіб формуванню у школярів творчого, евристичного мислення, а також прагнення до дослідницької діяльності. Особливо розвиткові таких навичок сприяє розв'язування задач різними способами, адже кожен новий спосіб розкриває цю задачу з іншого боку, покаже її глибинні властивості; спонукає учня дивитися на задачу, аналізуючи покроково усі дані і що можна отримати з них; що з того, що можна отримати, потрібне і веде до розв'язання задачі; чи можна використати інші факти, які приведуть до швидшого розв'язання задачі і т. п. Ми вважаємо, що під час уроку доцільно фіксувати увагу учнів на можливостях розв'язати одну і ту саму задачу декількома способами, заохочувати їх до відшукування альтернативних способів розв'язування задач. Наприклад, стандартна задача знайти площу трикутника за трьома відомими сторонами розв'язується за формулою Герона, але якщо сторони виражені ірраціональними числами (наприклад: $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ і $\sqrt{13}$), то цей спосіб призведе до громіздких обчислень. Проте їх можна уникнути, скориставшись альтернативним способом розв'язування цієї задачі: використати для трикутника теорему косинусів (яка дає змогу знайти косинус будь-якого з кутів), а потім обчислити синус цього кута і власне площу трикутника. Спрощення розв'язання задачі є далеко не єдиною перевагою використання альтернативних способів її розв'язування, адже методи ґрунтуються на використанні різних тем математики, що дозволить наочно продемонструвати учням практичність і важливість вивчення застосованих тем в межах різних дисциплін, показати взаємозв'язок математичних предметів. Крім того, вважаємо розв'язання будь-якої математичної задачі (чи прикладу) щонайменше двома способами більшою гарантією правильності розв'язання та перевіркою одного зі способів, що, на наш погляд, сприяє підвищенню рівня відповідальності учня за кінцевий продукт, а не просто за завершення виконання, наприклад, домашнього завдання. У разі великої складності повної перевірки можна поради провести хоча б часткову оцінку або перевірити розмірність результату, його порядок, наближене значення. Ми вважаємо пошуки різних способів розв'язування задач цікавою темою для обговорення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Учені і педагоги-практики приділяють значну увагу різним аспектам математичної підготовки учнів: формування творчої особистості школяра, розвиток творчого мислення учня у процесі навчання математики досліджували Бевз Г.П., Бурда М.І., Васильєва Д.В., Кірман В.К., Кушнір В.А., Скафа О.І., Слепкань З.І., Хмара Т.М., Чашечникова О.С. та ін. [1]; забезпечення наступності навчання математичних дисциплін, навчально-дослідницьку діяльність учнів вивчали Бевз В.Г., Ботузова Ю.В., Владімірова Н.Г., Гнезділова К.М., Швець В.О. та ін.; інноваційну діяльність при профільному вивченні математики та геометричну складову нестандартних задач розглядали Бевз Г.П., Возняк О.Г., Ізюмченко Л.В., Коломієць О.М., Макаруч О.П., Матяш О.І., Панасенко О.Б., Працьовитий М.В., Рабець К.В., Ріжняк Р.Я., Тарасенкова Н.А., Ясінський В.А. та ін. [1; 7]; відшукуванню різних способів розв'язування геометричних задач присвячені роботи Апостолової Г.В., Бевз В.Г., Зеленька О.П. [4; 5], Ігнатенко М.Я. [6], Істера О.С., Полонського В.Б., Рабіновича Ю.М., Якіра М.С. [8] та ін.; критичності мислення і важливості перевірки отриманих результатів та оцінці відповідності отриманих розв'язків стартовій математичній моделі присвячені роботи Голодюк Л.С., Ізюмченко Л.В., Філера З.Ю. та ін. [2; 7]. Незважаючи на значну кількість досліджень, присвячених організації навчальної діяльності учнів, геометрична складова роботи зі школярами, які вивчають математику на профільному рівні, потребує подальшого дослідження.

Мета статті полягає в системному розгляді та порівнянні різних методів розв'язання однієї геометричної задачі як засобу розвитку гнучкості мислення та формування в учнів навички пошуку альтернативних варіантів знаходження правильної відповіді.

Завдання: розкрити методичні аспекти роботи з учнями фізико-математичних класів на прикладі пошуків розв'язання однієї задачі.

Методи дослідження. Для реалізації поставленої мети та виконання завдань статті використано теоретичні (аналіз першоджерел з проблеми дослідження, порівняння), праксиметричні (вивчення педагогічного досвіду вчителів математики для його аналізу й узагальнення), емпіричні (педагогічне спостереження, аналіз навчального процесу) методи дослідження.

Виклад основного матеріалу дослідження. Авторів завжди цікавила тема пошуку альтернативних способів розв'язування математичних задач, використовуючи різні розділи математики. Наприклад, для розв'язання однієї геометричної задачі можна задіяти тригонометричні співвідношення, різні типи рівнянь, координати та вектори, а також інші розділи геометрії. Своє застосування знаходять системи рівнянь, якщо у задачі вводиться більше однієї змінної, та системи нерівностей при застосуванні, наприклад, методу оцінки. У ході розв'язування задачі нерідко використовуються нерівності з однією змінною, наприклад, при дослідженні виду трикутника. При цьому використання окремих інструментів для розв'язування задачі приведе до різної кількості кроків неоднакової складності. Продемонструвати дану ідею учням можна за допомогою вдало підібраної задачі, розв'язавши її декількома способами і визначивши оптимальний з них. Таким чином, кожен учень знайде найбільш зрозумілий для себе спосіб, буде вмотивований до пошуку інших способів у позаурочний час, наприклад, під час гурткової чи індивідуальної роботи, що сприятиме розвитку критичного мислення.

У даній статті проілюстровано ідею пошуку різних способів розв'язання на прикладі однієї задачі із збірника [3, с. 205].

Задача 1 (№ 10.377). Бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, що дорівнюють 4 і 2 см, а висота, проведена до тієї самої сторони, дорівнює $\sqrt{15}$ см. Чому дорівнюють сторони трикутника, якщо відомо, що вони виражаються цілими числами?

Розв'язання. Нехай дано $\triangle ABC$, BH – висота, BK – бісектриса (рис. 1).

Дослідження. Якою б не була (конкурсна) геометрична задача на трикутник, на наш погляд, бажано, якщо це можливо, визначити вид даного трикутника (рис. 1). Зауважимо, що якщо $\angle A$ прямий, то бічна сторона BA є висотою $BH = \sqrt{15}$ см (не є цілочисловою), не задовольняє умову задачі, а тому теоретично можливі два варіанти (рис. 1):

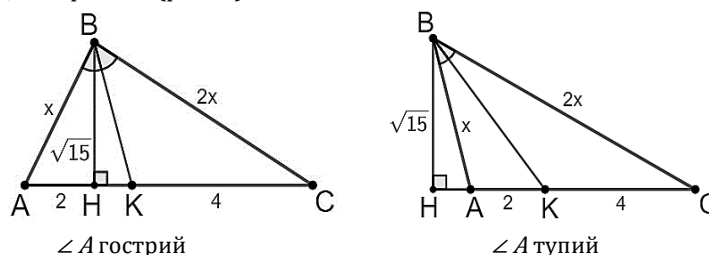


Рис. 1. Можливі випадки для $\triangle ABC$

З $\triangle ABC$ за властивістю бісектриси $\frac{AB}{AK} = \frac{BC}{KC} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, тоді:

$$AB = x, BC = 2x, AC = 6 \text{ (см)}. \quad (1)$$

З $\triangle ABH$, $\angle H = 90^\circ$: $AB = x$ – гіпотенуза,

$$x > \sqrt{15} \Rightarrow 2x > 2\sqrt{15}, x^2 > 15. \quad (2)$$

Оскільки $6 < 2\sqrt{15} < 2x$, то $AC < BC$ і $AB < BC$, маємо, що BC – найбільша сторона, навпроти якої лежить $\angle A$. Для визначення виду $\triangle ABC$ дослідимо знак нерівності: $BC^2 > /< / = AB^2 + AC^2$, отримаємо $(2x)^2 > /< / = x^2 + 6^2$, звідки $3x^2 > /< / = 36$, або $x^2 > /< / = 12$. Враховуючи нерівності (2), маємо знак " $>$ ", а тому $\triangle ABC$ тупокутний, $\angle A$ – тупий, відповідно $\angle B, \angle C$ – гострі.

І спосіб. Теорема Піфагора

Використаємо (1) і теорему Піфагора (рис. 2): $\triangle ABH$, $\angle H = 90^\circ$: $AH = \sqrt{x^2 - 15}$, $\triangle BHC$, $\angle H = 90^\circ$: $HC = \sqrt{4x^2 - 15}$. $AC = 6$ (см); $AC = HC - HA$, тоді: $\sqrt{4x^2 - 15} - \sqrt{x^2 - 15} = 6$, маємо ірраціональне рівняння:

$$\sqrt{4x^2 - 15} = 6 + \sqrt{x^2 - 15}, \quad (3)$$

область визначення якого можна не обчислювати, оскільки за (2) $x^2 > 15$.

$$4x^2 - 15 = 36 + (x^2 - 15) + 12\sqrt{x^2 - 15},$$

звідки $4\sqrt{x^2 - 15} = x^2 - 12$, при піднесенні до квадрата сторонніх коренів не отримаємо, якщо врахуємо умову (2). А тоді $16(x^2 - 15) = 144 - 24x^2 + x^4$,

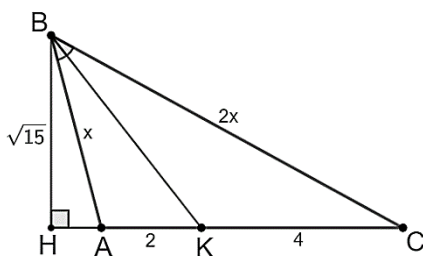


Рис. 2. Трикутник, який задовольняє умову

$$x^4 - 40x^2 + 384 = 0, \quad (4)$$

Виконаємо заміну $x^2 = t, t \geq 0$, отримаємо:

$$t^2 - 40t + 384 = 0, (t - 16)(t - 24) = 0, \begin{cases} t = 16 \Rightarrow x = 4, \\ t = 24 \Rightarrow x = 2\sqrt{6} \end{cases} \text{ (розглядаємо лише додатні значення } x \text{).}$$

За умовою довжини сторін виражаються цілими числами, тому варіант $x = 2\sqrt{6}$ дає сторонній корінь, який може цікавити нас лише, якщо в умові прибрати умову цілочисловості сторін. Якщо $x = 4$, маємо $AB = 4, BC = 8$.

Відповідь: $AB = 4$ см, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см.

II спосіб. Метод площ

Визначимо двома способами площу трикутника $\triangle ABC$ і прирівняємо їх (рис. 2):

3 $\triangle ABC$: площа $S = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{15} = 3\sqrt{15}$ (см²); врахуємо сторони (1), тоді півпериметр $p = \frac{x+2x+6}{2} = \frac{3}{2}x + 3$, за формулою Герона

$$S = \sqrt{\left(\frac{3}{2}x + 3\right)\left(\frac{3}{2}x + 3 - 6\right)\left(\frac{3}{2}x + 3 - x\right)\left(\frac{3}{2}x + 3 - 2x\right)} = \\ = \sqrt{\left(\frac{3}{2}x + 3\right)\left(\frac{3}{2}x - 3\right)\left(\frac{1}{2}x + 3\right)\left(3 - \frac{1}{2}x\right)} = \frac{3}{4}\sqrt{(x^2 - 4)(36 - x^2)}.$$

Прирівнявши площі отримаємо: $3\sqrt{15} = \frac{3}{4}\sqrt{(x^2 - 4)(36 - x^2)}$, $15 \cdot 16 = (x^2 - 4)(36 - x^2)$, звідки $x^4 - 40x^2 + 384 = 0$. Отримали рівняння (4), а тому матимемо таку ж саму відповідь, як і у попередньому способі.

III спосіб. Метод площ і теорема Піфагора

Використаємо попередні позначення (рис. 2), маємо $AB = x, CB = 2x, AC = 6, S_{\triangle ABC} = 3\sqrt{15}$, $AH = \sqrt{x^2 - 15}, HC = \sqrt{4x^2 - 15}$.

3 адитивності площ: $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle CBH} - S_{\triangle ABH}$, отримаємо рівняння.

$3\sqrt{15} = \frac{1}{2}\sqrt{15}\sqrt{4x^2 - 15} - \frac{1}{2}\sqrt{15}\sqrt{x^2 - 15}$, звідки $\sqrt{4x^2 - 15} - \sqrt{x^2 - 15} = 6$, прийшли до рівняння (3), а тому маємо ту ж відповідь.

IV спосіб. Використання основної тригонометричної тотожності

Нехай $AB = x, CB = 2x, \angle ABC = \beta$, тоді $AC = 6$, $S = 3\sqrt{15}$. Запишемо теорему косинусів (рис. 3), $\triangle ABC$: $36 = x^2 + 4x^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \cos \beta$, $36 = 5x^2 - 4x^2 \cos \beta$. Звідки $\cos \beta = \frac{5x^2 - 36}{4x^2}$.

Площа трикутника:

$$S = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x \cdot \sin \beta \Rightarrow \sin \beta = \frac{S}{x^2} = \frac{3\sqrt{15}}{x^2}.$$

3 основної тригонометричної тотожності отримаємо рівняння

$$\left(\frac{5x^2 - 36}{4x^2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{15}}{x^2}\right)^2 = 1 \text{ та } (5x^2 - 36)^2 + 16 \cdot (3\sqrt{15})^2 - 16x^4 = 0, \\ 9x^4 - 360x^2 + 36^2 + 16 \cdot 9 \cdot 15 = 0,$$

Після скорочення маємо $x^4 - 40x^2 + 384 = 0$, це є рівняння (4), а тому отримаємо таку ж саму відповідь.

Зауважимо, що запропонований учнями спосіб обчислення синуса кута також можна вважати прийнятним: використовуючи радіус описаного кола $R = \frac{abc}{4S} = \frac{6 \cdot x \cdot 2x}{4 \cdot 3 \cdot \sqrt{15}} = \frac{x^2}{\sqrt{15}}$ і наслідок з теореми синусів $\frac{AC}{\sin \beta} = 2R$, $AC = 6$, отримаємо вираз для синуса кута β : $\sin \beta = \frac{3}{R} = \frac{3\sqrt{15}}{x^2}$. Звичайно, провівши спрощення у системі двох рівнянь $R = \frac{abc}{4S}$, $S = \frac{1}{2}ac \sin \beta$, ми отримаємо той самий результат для $\sin \beta$. А тому недоцільно вважати це іншим розв'язанням.

V спосіб. Використання тригонометричних співвідношень

У попередніх позначеннях: $AB = x, CB = 2x, S_{\triangle ABC} = 3\sqrt{15}, AH = \sqrt{x^2 - 15}, HC = \sqrt{4x^2 - 15}; \angle A = \alpha, \angle C = \gamma$ (рис. 4). З іншого боку площа трикутника $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x \cdot \sin(180 - (\alpha + \gamma)) = 3\sqrt{15}; \sin(180 - (\alpha + \gamma)) = \frac{3\sqrt{15}}{x^2}$ (маємо вираз для синуса $\angle B$).

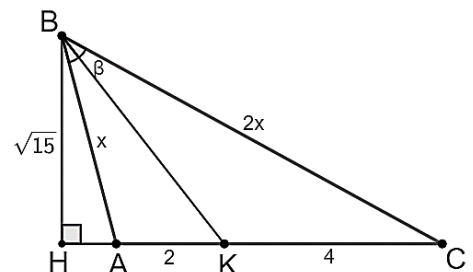


Рис. 1. Тригонометричні співвідношення у $\triangle ABC$

З прямокутних трикутників визначимо тригонометричні функції гострих кутів (чи суміжних з ними):

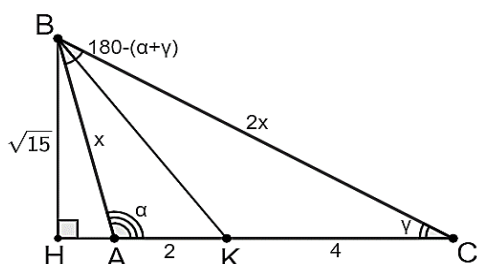


Рис. 4. Тригонометричні співвідношення

$$\text{з } \triangle ABH, \angle H = 90^\circ: \sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{x}, \cos \alpha = -\frac{\sqrt{x^2-15}}{x}; \quad \text{з } \triangle BHC, \angle H = 90^\circ: \sin \gamma = \frac{\sqrt{15}}{2x}, \cos \gamma = \frac{\sqrt{4x^2-15}}{2x}.$$

$$\begin{aligned} \text{Обчислимо синус } \angle B: \sin(180^\circ - (\alpha + \gamma)) &= \\ &= \sin(\alpha + \gamma) = \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma = \\ &= \frac{\sqrt{15}}{x} \cdot \frac{\sqrt{4x^2-15}}{2x} - \frac{\sqrt{x^2-15}}{x} \cdot \frac{\sqrt{15}}{2x} = \frac{\sqrt{15}(\sqrt{4x^2-15} - \sqrt{x^2-15})}{2x^2}. \end{aligned}$$

Прирівнявши синуси кута $180^\circ - (\alpha + \gamma)$, отримаємо рівняння: $\frac{\sqrt{15}(\sqrt{4x^2-15} - \sqrt{x^2-15})}{2x^2} = \frac{3\sqrt{15}}{x^2}$, $\sqrt{4x^2-15} - \sqrt{x^2-15} = 6$, прийшли до (3), а тому маємо ту саму відповідь.

VI спосіб. Формула бісектриси

За попередніх позначень маємо (рис. 2): $AB = x$, $CB = 2x$, $AH = \sqrt{x^2-15}$, $HK = HA + AK = \sqrt{x^2-15} + 2$; BK – бісектриса, а тому $BK = \sqrt{ac - a_1c_1} = \sqrt{BC \cdot AB - KC \cdot AK} = \sqrt{2x^2 - 8}$.

Для прямокутного трикутника $\triangle HBK$, $\angle H = 90^\circ$, запишемо теорему Піфагора:

$$(\sqrt{2x^2-8})^2 = (\sqrt{x^2-15} + 2)^2 + (\sqrt{15})^2, \text{ після зведення подібних маємо } x^2 - 12 = 4\sqrt{x^2-15}, \text{ а тоді } x^4 - 24x^2 + 144 = 16 \cdot (x^2 - 15), \text{ звідки } x^4 - 40x^2 + 384 = 0. \text{ Отримали рівняння (4), маємо таку саму відповідь.}$$

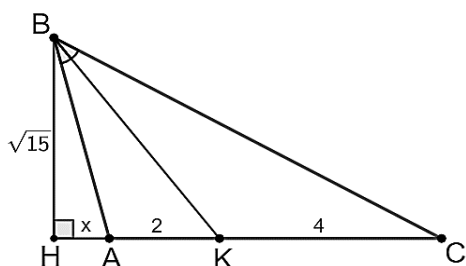


Рис. 5. Властивість бісектриси

Зауваження. Введемо (для простоти) такі позначення $HA = x$ (рис. 5):

з $\triangle HBK$, $\angle H = 90^\circ$ виразимо бісектрису $BK = \sqrt{(x+2)^2 + 15}$, а з $\triangle HBA$, $\angle H = 90^\circ$ сторону $BA = \sqrt{x^2 + 15}$, $BC = 2 \cdot BA = 2\sqrt{x^2 + 15}$ і потім використаємо формулу бісектриси $\triangle ABC$:

$$BK = \sqrt{ac - a_1c_1} = \sqrt{BC \cdot BA - KC \cdot KA},$$

$$BK = \sqrt{\sqrt{x^2 + 15} \cdot 2\sqrt{x^2 + 15} - 4 \cdot 2}.$$

Прирівнявши довжини бісектрис, отримаємо:

$$\sqrt{(x+2)^2 + 15} = \sqrt{2(x^2 + 15) - 8},$$

$$x^2 + 4x + 4 + 15 = 2x^2 + 30 - 8, \text{ або } x^2 - 4x + 3 = 0,$$

$$x = 1, \text{ тоді } AB = 4, BC = 8,$$

$$x = 3, \text{ тоді } AB = 2\sqrt{6}, \text{ що не є цілим.}$$

Отримали таку саму відповідь. І хоч під час розв'язання ми отримали різні рівняння (бо були різні позначення), це розв'язання не можна вважати іншим способом у порівнянні з VI способом, оскільки у обох розв'язаннях використано формулу бісектриси і теорему Піфагора.

VII спосіб. Добудова подібні трикутники

Нехай $AB = x$. Проведемо пряму $AE \parallel BC$ і продовжимо бісектрису BK до перетину з AE , побудуємо $EN \perp AC$ (рис. 6). Тоді $\angle ABK = \angle KBC$ (за означенням бісектриси), $\angle KBC = \angle AEK$ (як внутрішні різносторонні при $AE \parallel BC$ і січній BE), отже $\angle ABK = \angle AEK$ (за транзитивністю відношення рівності), а тоді $\triangle BAE$ рівнобедрений.

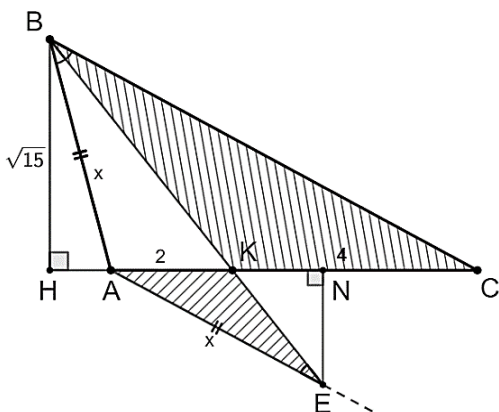


Рис. 6. Подібні трикутники

$$\triangle AKE \sim \triangle CKB \quad (\text{за двома кутами}), \quad k = \frac{AK}{KC} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow NE = \frac{1}{2}BH = \frac{\sqrt{15}}{2}; \quad \frac{KN}{HK} = \frac{1}{2}, \quad KN = \sqrt{x^2 - \frac{15}{4}} - 2$$

$$(\text{з } \triangle AEN, \angle N = 90^\circ), \quad HK = \sqrt{x^2 - 15} + 2 \quad (\text{з } \triangle HBK, \angle H = 90^\circ).$$

$$\text{Отже, } \frac{\sqrt{x^2-15}+2}{\sqrt{x^2-\frac{15}{4}}-2} = \frac{2}{1}, \text{ звідки } 2\left(\sqrt{x^2-\frac{15}{4}}-2\right) = \sqrt{x^2-15}+2, \text{ а}$$

$$\text{тоді } 2\sqrt{\frac{4x^2-15}{4}} = \sqrt{x^2-15}+6, \text{ після спрощення отримаємо рівняння:}$$

$$4x^2 - 15 = x^2 - 15 + 12\sqrt{x^2-15} + 36;$$

$$\text{або } 3x^2 - 36 = 12\sqrt{x^2-15};$$

$$x^4 - 24x^2 + 144 = 16(x^2 - 15); \quad x^4 - 40x^2 + 384 = 0. \text{ Маємо рівняння (4) і таку саму відповідь.}$$

VIII спосіб. Добудова, осьова симетрія

Добудуємо $\triangle MHC$ і усі його елементи симетрично $\triangle BHC$ відносно HC і позначимо $BC = y$, $HA = x$ (рис. 7).

Обчислимо площу $\triangle MBC$ двома способами:

$BM = 2\sqrt{15}$, $HC = x + 6$, $S_{\triangle MBC} = \sqrt{15}(x + 6)$, а з іншого боку півпериметр $p = y + \sqrt{15}$, за формулою Герона:

$$S = \sqrt{(y + \sqrt{15})(y + \sqrt{15} - y)^2(y - \sqrt{15})}, S = \sqrt{15(y^2 - 15)}.$$

За теоремою Піфагора з $\triangle BHA$: $BA = \sqrt{15 + x^2}$, з властивості бісектриси і співвідношень між AK і KC , $BC = 2BA$, а тому $y = 2\sqrt{15 + x^2}$.

$$\begin{cases} \sqrt{15}(x + 6) = \sqrt{15}(y^2 - 15), \\ y = 2\sqrt{15 + x^2}, \end{cases} \quad \text{звідки}$$

$$\begin{cases} x^2 + 12x + 36 = y^2 - 15, \\ y^2 = 4(15 + x^2), \\ x^2 + 12x + 51 = 60 + 4x^2, x^2 - 4x + 3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1, y = 8, \text{ тоді } AB = 4, BC = 8; \\ x = 3, \text{ тоді } y = 4\sqrt{6}, \text{ що не є цілим.} \end{cases}$$

Отримали таку саму відповідь.

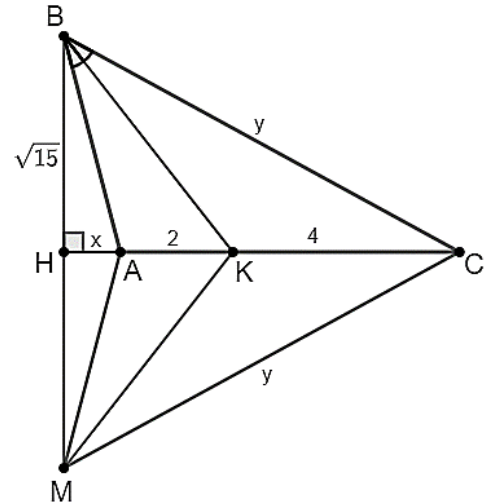


Рис. 7. Осьова симетрія

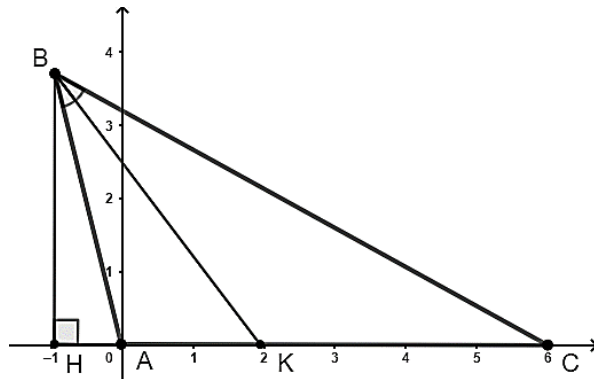


Рис. 8. Метод координат

IX спосіб. Метод координат

Задамо координатну площину так, щоб т. А стала початком координат, а додатний напрям вісі абсцис задамо у напрямі від А до С (рис. 8), тоді координати точок $A(0; 0)$, $K(2; 0)$, $C(6; 0)$ позначимо абсцису т. Н за x , тоді $H(x; 0)$, $B(x; \sqrt{15})$.

$$\overrightarrow{AB}(x; \sqrt{15}), |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + 15};$$

$$\overrightarrow{CB}(x - 6; \sqrt{15}), |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{(x - 6)^2 + 15}.$$

Тоді за властивістю бісектриси $\frac{\sqrt{x^2 + 15}}{\sqrt{(x - 6)^2 + 15}} = \frac{1}{2}$,

$$2\sqrt{x^2 + 15} = \sqrt{(x - 6)^2 + 15},$$

$$4x^2 + 60 = x^2 - 12x + 51,$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0,$$

$$\begin{cases} x = -1, \text{ тоді } AB = 4, BC = 8; \\ x = -3, \text{ тоді } AB = 2\sqrt{6}, \text{ що не є цілим.} \end{cases}$$

X спосіб. Метод оцінки

За умовою довжини сторін трикутника виражені цілими числами. За таких обставин виникає ще один спосіб розв'язання задачі. Для нього дослідження виду трикутника не потрібне.

Нехай $AB = x$, $CB = 2x$ (рис. 2).

Найбільшою стороною у даному трикутнику може бути $CB = 2x$ або $AC = 6$, тоді з нерівності трикутника отримаємо: $\begin{cases} 6 < x + 2x \\ 2x < x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 6 \end{cases}$.

Оскільки $AB \geq BH$, $AB \geq \sqrt{15}$, і крім того, за умовою довжина сторони $AB = x$ - ціле число, а тому $AB \geq 4$. Отримали, x - ціле число, менше шести, а тому маємо лише два можливих варіанти:

1) $x = 4$, трикутник зі сторонами 4, 8, 6, за Героном обчислюємо площу:

$$p = 9, S = \sqrt{9 \cdot (9 - 4) \cdot (9 - 8) \cdot (9 - 6)} = 3\sqrt{15}.$$

Висота $h = \frac{2S}{AC} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{15}}{6} = \sqrt{15}$ - трикутник задовольняє умови задачі.

2) $x = 5$, трикутник зі сторонами 5, 10, 6:

$$p = \frac{21}{2}, S = \sqrt{\frac{21}{2} \cdot \left(\frac{21}{2} - 5\right) \cdot \left(\frac{21}{2} - 10\right) \cdot \left(\frac{21}{2} - 6\right)} = \frac{3}{4}\sqrt{231}.$$

Висота $h = \frac{2S}{AC} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}\sqrt{231}}{6} \neq \sqrt{15}$ - трикутник не задовольняє умови задачі.

А тому є єдина відповідь: $AB = 4$ см, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см.

Розглянемо узагальнену версію початкової задачі, прибравши умову цілочисловості довжин сторін трикутника. Тоді умова звучатиме так:

Задача 2. Бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, що дорівнюють 4 і 2 см, а висота, проведена до тієї самої сторони, дорівнює $\sqrt{15}$ см. Чому дорівнюють сторони трикутника?

За таких умов одержимо три варіанти відповіді: $AB = 4$, $BC = 8$ або $AB = 2\sqrt{6}$, $BC = 4\sqrt{6}$, або $AB = \sqrt{15}$, $BC = 2\sqrt{15}$; в усіх випадках $AC = 6$ (см).

Для розв'язання задачі 2 можна використати усі наведені вище способи, окрім десятого, адже умову $\begin{cases} x \geq 4 \\ x < 6 \end{cases}$ задовольняє безліч чисел.

Висновок. Оскільки у реальному житті при прийнятті якихось рішень потрібно мати принаймні декілька можливих варіантів, так і у геометрії при розв'язанні задач бажано розуміти різні підходи до їхнього розв'язання, мати щонайменше декілька шляхів до успішної реалізації і завершення вирішення задач. Такий спосіб організації освітнього процесу сприятиме розвитку логічного мислення учнів і формуванню критичної оцінки отриманих результатів, а також підвищенню математичної освіченості школярів.

Вважаємо, що наш досвід може бути корисним для інших вчителів, що працюють у профільних класах, та студентів фізико-математичних факультетів. Практику відшукування альтернативних способів розв'язування математичних задач вважаємо виправданою, на що плануємо спрямувати свої подальші дослідження.

Список використаних джерел

1. Бевз Г.П. Геометрія трикутника: Навч.-метод. посіб. для загальноосвіт. навч. закл. К.: Генеза, 2005. 120 с.
2. Голодюк Л.С. Організація навчально-пізнавальної діяльності учнів основної школи у навчанні математики в урочний та позаурочний час: теоретичний аспект: монографія. Кропивницький: ФОП Александрова МВ, 2017. 404 с.
3. Збірник задач з математики для вступників до вузів за редакцією М.І. Сканаві. Київ: Вища школа, 1994. 445 с.
4. Зеленьяк О.П. Решение задач по планиметрии. Технология алгоритмического подхода на основе задач-теорем. Моделирование в среде Turbo Paskal. Киев, Москва: ДияСофтЮП, ДМК Пресс, 2008. 336 с.
5. Зеленьяк О.П. Технології розв'язування геометричних задач. *Наукові записки. Випуск 71. Серія: Математичні науки*. Кіровоград: КДПУ ім. В. Винниченка, 2012. С. 27-46.
6. Ігнатенко М.Я, Кобко Л.М. Одна геометрична задача крізь різні розділи. *Математика в сучасній школі*. 2013. № 4. С. 4-8.
7. Ізюмченко Л.В., Ключник І.Г., Гаєвський М.В. Організація навчальної діяльності учнів профільних класів (на прикладі інтегрованих завдань високого рівня з математики). *Bulletin of the Cherkasy Bohdan Khmelnytsky National University. Series "Pedagogical Sciences"*, Черкаси, 2020. № 3. С. 187-192.
8. Полонський В.Б., Рабінович Ю.М., Якір М.С. Вчимося розв'язувати задачі з геометрії. Навчально-методичний посібник Тернопіль: Підручники і посібники, 2002. 240 с.

References

1. Bevez H.P. Heometriia trykutnyka [Triangle geometry]: Navch.-metod, posib. dlia zahalnoosvit. navch. zakl. K.: Heneza, 2005. 120 s.
2. Holodiuk L.S. Orhanizatsiia navchalno-piznavalnoi diialnosti uchniv osnovnoi shkoly u navchanni matematyky v urochnyi ta pozaurchnyi chas: teoretychnyi aspekt: monohrafiia [Organisation of educational and cognitive activity of secondary school pupils in teaching mathematics in classroom and extracurricular time: theoretical aspect]. Kropyvnytskyi: FOP Aleksandrova MV, 2017. 404 s.
3. Zbirnyk zadach z matematyky dlia vstupnykiv do vtuziv za redaktsiieiu M.I. Skanavi. [Collection of mathematics problems for university entrants]. Kyiv: Vyshcha shkola, 1994. 445 s.
4. Zeleniak O.P. Reshenye zadach po planymetriyy. Tekhnolohyia alhorytmycheskoho podkhoda na osnove zadach-teorem. Modelyrovanye v srede Turbo Paskal [Solving problems in planimetry. Technology of algorithmic approach on the basis of problems-theorems. Modelling in Turbo Paskal environment]. Kyev, Moskva: DyaSoftluP, DMK Press, 2008. 336 s.
5. Zeleniak O.P. Tekhnolohii rozviazuvannia heometrychnykh zadach [Technologies for solving geometric problems]. *Naukovi zapysky. Vypusk 71. Serii: Matematychni nauky*. Kirovohrad: KDPU im. V. Vynnychenka, 2012. S. 27-46.
6. Ihnatenko M.Ia, Kobko L.M. Odnа heometrychnа zadacha kriz rizni rozdiily [One geometry problem through different sections]. *Matematyka v suchasni shkoli*. 2013. № 4. S. 4-8.
7. Iziumchenko L.V., Kliuchnyk I.H., Haievskiy M.V. Orhanizatsiia navchalnoi diialnosti uchniv profilnykh klasiv (na prykladi intehrovanykh zavdan vysokoho rivnia z matematyky) [Organisation of learning activities of pupils of specialised classes (on the example of integrated high-level tasks in mathematics)]. *Bulletin of the Cherkasy Bohdan Khmelnytsky National University. Series "Pedagogical Sciences"*, Cherkasy, 2020. № 3. S. 187-192.
8. Polonskyi V.B., Rabinovych Yu.M., Yakir M.S. Vchymosia rozviazuvaty zadachi z heometrii [Learning to solve geometry problems]. Navchalno-metodychnyi posibnyk Ternopil: Pidruchnyky i posibnyky, 2002. 240 s.