



Яковлева О., Банна Ю. Приклади використання графів при розв'язанні математичних і логічних задач у 5-6 класах. *Освіта. Інноватика. Практика*, 2023. Том 11, № 9. С. 79-85. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol11i9-0011>

Yakovlieva O., Banna Yu. Pryklady vykorystannia hrafov pry rozv'iazanni matematychnykh i lohichnykh zadach u 5-6 klasakh [Examples of using graphs in solving mathematical and logical problems in 5-6 classes]. *Osvita. Innovatyka. Praktyka – Education. Innovation. Practice*, 2023. Vol. 11, No 9. S. 79-85. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol11i9-0011>

УДК 519.171.1, 372.862

DOI: 10.31110/2616-650X-vol11i9-011

Ольга ЯКОВЛЕВА

Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К.Д. Ушинського, Україна
<https://orcid.org/0000-0003-0750-9769>
yakovlieva.on@pdpu.edu.ua

Юлія БАННА

Комунальна установа «Сумська спеціалізована школа I-III ступенів №17», Україна
rebenkoyulia09@gmail.com

ПРИКЛАДИ ВИКОРИСТАННЯ ГРАФІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ МАТЕМАТИЧНИХ І ЛОГІЧНИХ ЗАДАЧ У 5-6 КЛАСАХ

Анотація. Теорія графів – розділ математики, який знаходиться на стику алгебри, геометрії, комбінаторики, ряду інших математичних дисциплін і використовує їх методи для розв'язання як математичних задач, так і задач програмування, теорії інформації, фізики тощо. В останні роки на шкільних математичних конкурсах, олімпіадах, турнірах зустрічаються задачі, які можуть бути розв'язані засобами теорії графів, крім того, такі задачі зустрічаються і на олімпіадах з інформатики. В шкільному курсі математики графи та їх властивості не вивчаються, однак, їх можна вивчати та використовувати для розв'язання задач на факультативах з математики, на заняттях математичних гуртків, на уроках логіки. У статті розглядається використання деяких методів та алгоритмів теорії графів для розв'язання математичних та логічних задач в школі, які, на думку авторів, можуть бути запропоновані учням 5-6 класів. Розглянуто та представлено рішення задач на побудову маршруту, задач із використанням зв'язаних графів, описано процедури алгоритму Крускала, алгоритму Прима, задач, при рішенні яких використано жадібний алгоритм, задачі аналізу отриманих рішень за допомогою алгоритму Прима, задачі з використанням властивостей ланцюгів та циклів, задачі із застосуванням леми про рукоштовкання. Для вчителів наведено необхідні теоретичні відомості з теорії графів, які використано при розв'язуванні задач. В статті зроблено короткий історичний огляд з розвитку теорії графів. Пропоновані задачі мають нескладні рішення та можуть бути використовувати на уроках логіки, факультативних заняттях з математики для учнів 5-6 класів. Задачі, при розв'язанні яких використовуються графи, доцільно розглядати на уроках інформатики, щоб познайомити учнів з одним з потужних математичних апаратів рішення задач. Такі уроки можуть стати інтегрованими з точки зору междисциплінарного підходу, а вчитель на уроці буде реалізовувати міжпредметну інтеграцію, що є актуальним в сучасних умовах.

Ключові слова: граф; алгоритм; математика; логіка; інформатика.

Olga YAKOVLEVIEVA

South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushynsky, Ukraine
<https://orcid.org/0000-0003-0750-9769>
yakovlieva.on@pdpu.edu.ua

Yuliia BANNA

Communal institution «Sumy specialized school of I-III degrees No. 17», Ukraine
rebenkoyulia09@gmail.com

EXAMPLES OF USING GRAPHS IN SOLVING MATHEMATICAL AND LOGICAL PROBLEMS IN 5-6 CLASSES

Abstract. Graph theory is a branch of mathematics that lies at the intersection of algebra, geometry, combinatorics, and a number of other mathematical disciplines and uses their methods to solve both mathematical problems and programming problems, problems of information theory, physics, etc. In recent years, at school mathematical competitions, Olympiads, and tournaments, there occur problems that can be solved by means of graph theory, in addition, such problems can be found also at computer science Olympiads. In the school mathematics course, graphs and their properties are not studied, however, they can be studied and used to solve problems in mathematics electives, in mathematics circles, in logic lessons. The article considers the use of some methods and algorithms of graph theory to solve mathematical and logical problems at school, which, according to the authors, can be offered to schoolchildren of grades 5-6. The authors consider route construction problems, problems using weighted graphs, procedures of Kruskal's algorithm, Prim's algorithm, problems solved using a greedy algorithm, problems of analysis of obtained solutions using Prim's algorithm, problems using properties of chains and cycles, problems solved using the handshake lemma. For teachers, the necessary theoretical information on graph theory, which was used in solving problems, is given. The article provides a brief historical overview of the development of graph theory. The proposed problems have simple solutions and can be used in logic lessons, optional mathematics classes for schoolchildren of grades 5-6. It is advisable to consider problems in the solution of which graphs are used in computer science classes to introduce students to one of the powerful mathematical tools for solving problems. Such lessons can become integrated from the point of view of an interdisciplinary approach, and the teacher in the lesson will implement interdisciplinary integration, which is relevant in modern conditions.

Keywords: graph; algorithm; math; logic; Computer Science.

Постановка проблеми. У даній статті ми розглянемо приклади використання графів при розв'язанні математичних задач і задач логіки в школі. Теорія графів або її елементи не вивчаються в шкільному курсі математики, але можуть розглядатися на уроках логіки, інформатики, факультативних заняттях з математики, заняттях математичних гуртків, при підготовці учнів до математичних олімпіад, олімпіад з інформатики.

Теорія графів є важливим розділом дискретної математики, крім того, теорія графів є її «наймолодшим» розділом. Вважається, що теорія графів почалася з задачі Леонарда Ейлера про сім мостів Кьонігсбергу. 1736 рік став датою народження теорії графів, коли в одному зі своїх листів Леонард Ейлер пропонує і формулює розв'язання задачі «про кьонігсберзькі мости» (рис. 1).

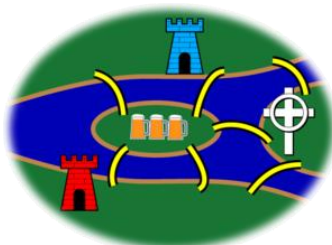


Рис. 1. Кьонігсберзькі мости

«У місті Кьонігсберзі на початку XVIII століття було сім мостів. Виникло питання: чи можлива така прогулянка, в якій шлях пройде всіма мостами, і по кожному мосту рівно один раз?». Ейлер представив карту мостів у вигляді графа: ребра – мости, а острови та береги – вершини, він вирішив це завдання і отримав відповідь – не можна. Надалі ця задача стала однією з класичних задач теорії графів.

Термін «граф» вперше був введений в 1936 р. Денешем Кьонігом – угорським математиком, автором першої монографії з теорії графів. В перекладі з грецької «граф» означає «пишу». Теорія графів знаходиться на стику алгебри, комбінаторики, геометрії, топології, ряду інших математичних дисциплін та використовує їх методи. Серед вчених, хто розвивав теорію графів у 19-20 ст., можна назвати У. Гамільтона, К. Жордана, К. Куратовського, П. Дірака, О. Оре, В. Хватала, А. Трахтмана та інших. У теперішній час теорія графів широко використовується в теорії інформації, побудові мереж, програмуванні, фізиці, лінгвістиці, медицині тощо.

Мета дослідження. Представити в статті приклади математичних та логічних задач для учнів 5-6 класів, при розв'язуванні яких можна використати алгоритми та методи теорії графів, що буде сприяти, з однієї сторони, ознайомленню учнів зі способами логічних суджень, новими прийомами побудови математичних моделей задач, а з іншої – використанню цікавих задач для підвищення інтересу учнів до вивчення математики.

Методи дослідження. Авторами було застосовано теоретичні та емпіричні методи дослідження в рамках логічного та порівняльного аналізу, методи узагальнення та класифікації.

Виклад основного матеріалу дослідження. Теорія графів є «наймолодшим» розділом математики, вона стала частиною дискретної математики або окремою навчальною дисципліною в закладах вищої освіти порівняльно нещодавно, в шкільному курсі математики вивчення елементів цієї теорії в теперішній час не передбачено. Тому з методичної точки зору питання включення теорії графів в шкільний курс математики практично не вивчено. Але в останній час задачі, які можуть бути розв'язані методами цієї теорії, з'являються на олімпіадах з математики, інформатики, на уроках інформатики при вивченні будови алгоритмів, на уроках логіки, коли деяка ієрархічно упорядкована інформація може бути представлена у вигляді графа тощо. Виникає необхідність знайомити учнів з графами як засобом побудови та дослідження математичних моделей достатньо широкого кола задач. Побудова графу задачі є вивченням математичного об'єкту з точки зору геометрії та комбінаторики, тому є наочним. Такий спосіб рішення задачі розвиває в учнів вміння та навички математичного моделювання, підвищує рівень їх логічного, абстрактного та математичного мислення. Знайомство учнів з графами розширить та поглибить математичний апарат, який учні використовують для вирішення математичних задач і проблем. Цікаві і нестандартні задачі, які можна вирішувати методами теорії графів, підвищать інтерес учнів до вивчення математики, що позначиться на якості математичної освіти.

На наш погляд, починати вивчати графи систематично в курсі математики можна у 5-6 класах, починаючи з простих задач, з вивчення найважливіших основних фактів теорії графів, в подальшому підвищуючи рівень задач і вивчаючи більш глибоко необхідні теоретичні основи теорії графів. Тому пропонуємо ряд задач, які вирішуються методами теорії графів і які можна пропонувати учням у 5-6 класі. Ці задачі мають різний рівень складності, для рішення деяких буде достатньо побудувати граф задачі. Ми розглянемо задачі із зваженими графами, розглянемо задачі, при рішенні яких

використаємо алгоритм Крускала та алгоритм Прима, наведемо рішення задачі, в якій будемо використовувати поняття ланцюга та циклу. Безумовно, представлені задачі та алгоритми не будуть вичерпувати всі типи та методи щодо застосування теорії графів до задач шкільного курсу математики.

Наведемо стисло деякі важливі теоретичні факти з теорії графів, які знадобляться нам для рішення задач [2, 3].

Граф – це вдалий спосіб наглядно проілюструвати відношення між двома множинами. Граф складається з скінченної множини V вершин і набору E пар вершин, які називають ребрами. Граф можна зобразити наочно. Вершини зображуються точками, а ребра – лініями (не обов'язково прямими), що з'єднують пари точок. Якщо ребро e з'єднує вершини x і y , то вершини x і y називають *суміжними*, а ребро, яке їх з'єднує – *інцидентним* з x і y . Число ребер інцидентних даній вершині, називається її *степенем*. Граф H називається *підграфом* графа G , якщо вершини і ребра графа H належать графу G .

Сума степенів всіх вершин будь-якого графа дорівнює подвоєній кількості його ребер (лема про рукоєстискання).

Серед графів виділяють орієнтовані та неорієнтовані графи. Граф називається *орієнтованим*, якщо кожне ребро графа має напрям. У орієнтованому графі кожна вершина може мати інцидентні ребра, що спрямовані до неї, і інцидентні ребра, що спрямовані від неї.

Зважений граф – це граф, кожному ребру якого поставлено у відповідність деяке число (вага ребра).

Послідовність ребер $v_1v_2, v_2v_3, \dots$ називається маршрутом на графі. Маршрут, у якого всі ребра різні, називається ланцюгом. Ланцюг, у якого всі вершини (крім, можливо, початкової і кінцевої) – різні називається простим ланцюгом. Простий ланцюг, у якого початкова і кінцева вершини збігаються, називається *циклом*. Граф, називається *зв'язним*, якщо для будь-яких двох його вершин існує простий ланцюг, який зв'язує їх.

Ейлерів контур – це замкнений ланцюг, який містить кожне ребро графу. Граф, який містить ейлерів контур називають ейлеровим графом. Граф називається напів-ейлеровим, якщо існує незамкнений ланцюг (ейлерів шлях), що проходить через кожне ребро графа. *Остовне дерево (підграф)* зв'язного графу – це зв'язний циклічний підграф (дерево), котрий містить всі вершини графа.

Тепер перейдемо до задач. Спочатку більш простіші задачі.

Задача 1. В Україні багато автобусних перевізників між містами, зупинимось на Infobus. Оберемо сім рейсів між містами: Київ-Одеса, Одеса-Львів, Київ-Суми, Дніпро-Полтава, Київ-Полтава, Вінниця-Харків, Вінниця-Чернігів (кожен рейс виконується в обидві сторони). Виникає питання, чи можна доїхати зі Львова до Полтави прямим рейсом? З однією пересадкою? З двома пересадками?

Для розв'язання достатньо побудувати граф задачі. Вершини графа ми позначимо великими літерами відповідно до назв міст, ребра графа – це рейси автобусів між містами згідно умови задачі (рис. 2).

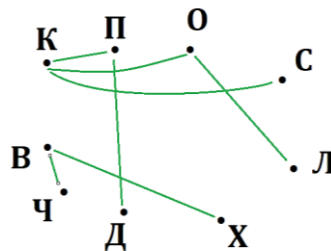


Рис. 2. Граф руху автобусів між містами

За графом бачимо, що прямого рейсу зі Львова до Полтави немає, з однією пересадкою також немає, а варіант з двома пересадками є: Львів – Одеса – Київ – Полтава.

Задача 2. Чи можна організувати футбольний турнір дев'яти команд так, щоб кожна команда провела по чотири зустрічі?

Побудуємо граф задачі, вважаючи вершинами графа команди, занумеровані від 1 до 9, а ребрами графа – лінії, які з'єднують команди, що зустрічаються.

Спочатку з'єднаємо сусідні вершини графа, з цього буде впливати, що кожна команда провела вже дві гри (рис. 3).

Зауважимо, що кожній команді залишилося зіграти по дві гри. Для того, щоб показати, що така ситуація можлива, нам достатньо з'єднати, наприклад, всі вершини отриманого дев'ятикутника через одну діагоналями (рис. 4).

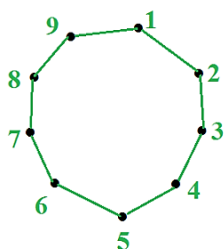


Рис. 3. Граф, де кожна команда провела дві гри

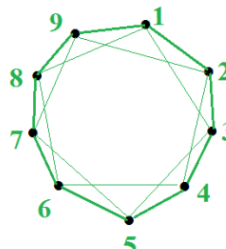


Рис. 4. Граф проведення ігор між командами

Відповідь: такий турнір можна організувати.

Тепер розглянемо задачі, в яких будемо застосовувати зважені графи.

Задача 3. Береги Туреччини омивають чотири моря: Середземне, Чорне, Егейське і Мармурове. З якого моря можна швидше дістатися до Анкари, якщо пересуватися можна шляхом, який зазначено в таблиці 1 (в умовних одиницях довжини)?

Таблиця 1.

	Анкара	Середземне	Егейське	Мармурове	Чорне	Сивас	Мармарис	Сиде	Аланія
Анкара						3	4	1	
Середземне									4
Егейське							3		
Мармурове								7	
Чорне						2			
Сивас	3				2				
Мармарис	4		3						
Сиде	1			7					2
Аланія		4						2	

Моря та міста в нашій задачі будуть служити вершинами графа, а ребрами графа будуть позначені можливі шляхи між ними (рис. 5).

Перенесемо дані з таблиці на граф (рис. 6), побудуємо зважений граф (рис. 6).

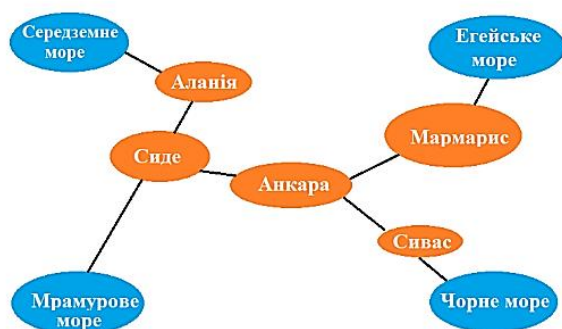


Рис. 5. Граф морів та міст

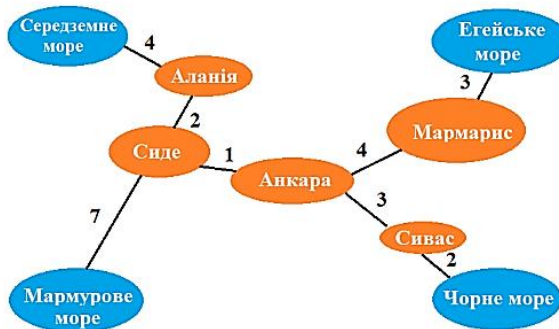


Рис. 6. Зважений граф

Підрахуємо довжину шляху від чотирьох морів до Анкари і дізнаємось звідки найшвидше можна дістатися:

- 1) Мармурове море – Анкара: $7 + 1 = 8$.
- 2) Чорне море – Анкара: $2 + 3 = 5$.
- 3) Егейське море – Анкара: $3 + 4 = 7$.
- 4) Середземне море – Анкара: $4 + 2 + 1 = 7$.

Отже, до Анкари найшвидше можна добратися з Чорного моря, на другому місці – Егейське і Середземне море, а довше всього добиратися з Мармурового моря.

Коли працюємо зі зваженими графами, то можемо використовувати три алгоритми. В даній задачі ми використовуємо два алгоритми – алгоритм Крускала, або «жадібний» алгоритм, та алгоритм Прима [1].

Авторство жадібного алгоритму приписують Джозефу Крускалу, американському математику і статистику, хоча ще в 1926 році подібний алгоритм розв'язування задач був запропонований Отакаром Боровкою, чеським математиком, найбільш відомим сьогодні своїми роботами з теорії графів.

Процедура жадібного алгоритму полягає у наступних кроках:

1. Виберемо ребро графа з найменшою вагою.
2. На кожному етапі обираємо ще не обране ребро найменшої ваги, включення якого не створює циклу.

3. Продовжуємо, поки не отримаємо остовне дерево (якщо граф має p вершин, то процедура закінчується, коли обрано $p - 1$ ребро).

Задача 4. На острові є чотири міста A,B,C,D. В кожному місті є аеропорт. На рисунку 7 зображено вартість перельоту між містами. Турист хоче полетіти в одне з них і найдешевше облетіти всі інші. Вкажіть найменшу суму, яку він може витратити для цього.

A: 620 B:630 B:640 Г:840 Д:860

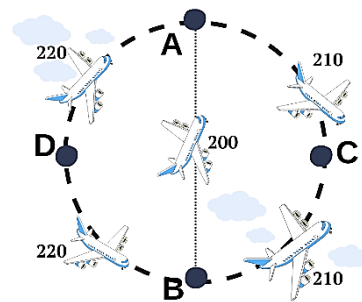


Рис. 7. Граф літаків

На рисунку міста позначені A, B, C, D – вершини графу. Ребра цього графу – це шлях між аеропортами. Також на рисунку вказана ціна білету, будемо її вважати вагою ребра графа.

На першому кроці нашого алгоритму Крускала виберемо ребро з найменшою вагою, на даному рисунку таке одне між містами A і B (рис. 8).

Далі на кожному кроці будемо обирати ще не обране ребро найменшої ваги, включення якого створює цикл. Якщо так і далі продовжувати, то у нас вийде остовне дерево. У нас вийшло два варіанта остовних дерев з найменшою вагою (рис. 9).

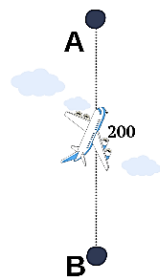


Рис. 8. Граф, у якому обрали одне ребро з найменшою вагою

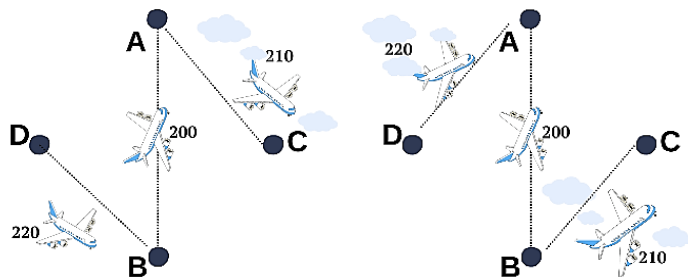


Рис. 9.

Вага наших дерев однакова: $220 + 210 + 200 = 630$.

За для перевірки рішення можна використати алгоритм Прима.

Алгоритм Прима

1. Обираємо будь-яку вершину, потім обираємо ребро найменшої ваги, яке інцидентне з нею.
2. На кожному етапі обираємо ребро найменшої ваги, але таке, щоб воно єдало з ще не включеної вершиною.

3. Продовжуємо, поки не включимо всі вершини.

Перевіримо вірність рішення задачі 4.

Обираємо вершину A, найменше ребро, яке виходить з цієї вершини з вагою 200 і з'єднується з вершиною B (рис.10).

Далі обираємо ребро найменшої ваги з вершини B (ребро з вершиною C – вага 210) (рис.11).

Так, як не повинен бути цикл, але потрібно, щоб було з'єднано всі ребра, то обираємо ребро з вершини A з вагою 220 (рис.12).

Відповідь: Б.

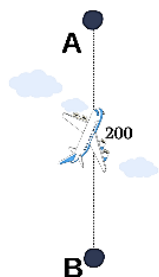


Рис. 10. Граф, де обрано з вершини A найменше ребро

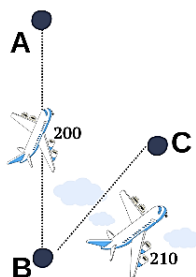


Рис. 11. Обрано ребро з вершини B

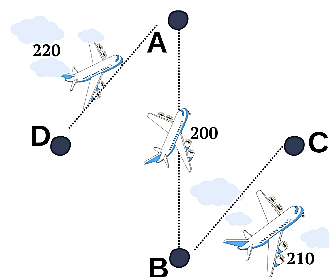


Рис. 12. Граф остовного дерева з найменшою вагою

Наведемо приклад задачі, в рішенні якої використовуються поняття ланцюгів та циклів.

Задача 5. У морі мешкають восьминіжки, у кожного з них або один або два друзі. Коли зішло сонце, ті, у кого було двоє друзів, посиніли, а ті, у кого один друг – пожовтіли, і виявилось, що будь-які двоє друзів – різнобарвні. Однак друзі повинні мати однаковий колір, і тому 10 синіх восьминожок перефарбувалися у жовтий колір, а 12 жовтих – у синій. Скільки восьминожок живе у морі?

Якщо ми восьминіжок зобразимо вершинами графа, вершини якого будуть з'єднані ребрами, якщо відповідні їм восьминіжки є друзями. Вершини графа можуть бути пофарбовані або у жовтий колір, або у синій колір. Перефарбування восьминіжок визначає таке ж перефарбування відповідних їм вершин графа. З умови задачі випливає, що степінь кожної вершини графа дорівнює або 1 або 2 (восьминіжка може мати або одного або двох друзів).

Компонентами графа можуть бути лише ланцюги або цикли. Але цикли в графі відсутні, так як після перефарбування всі вершини кожного циклу стануть синіми, що неможливо, так як за умовою задачі жовтих і синіх восьминіжок порівну.

Так як після перефарбування всі вершини ланцюгів, крім кінцевих, стануть синіми, то відсутні ланцюги, що складаються більш, ніж з двох ребер. Отже, компонентами графа є ланцюги, які складаються з трьох вершин і двох ребер. У ланцюгів кінцеві вершини жовті, а центральні – сині. Тому у графі є 6 ланцюгів, у яких вершини перефарбуються у синій колір (12 жовтих восьминіжок перефарбувалось у синій колір), та 10 ланцюгів, у яких вершини перефарбуються у жовтий колір (10 синіх восьминіжок перефарбувалось у жовтий колір), всього 16 ланцюгів. Тому у графі буде 48 вершин, а в морі 48 восьминіжок.

На останнє розглянемо одну логічну задачу, яку розв'яжемо двома способами.

Задача 6. Марина і шість її друзів – Катерина, Андрій, Олексій, Юлія, Наталія і Денис, – розмовляли по телефону по черзі друг з другом. Марина вважає, що кожен з її друзів поговорив по телефону три рази, вона сама поговорила з усіма, а з Катериною – навіть два рази. З'ясуйте, чи не помилилася Марина?

Побудуємо граф задачі. Вершини графа позначимо першими літерами імен друзів, вершину М розмістимо у центрі графу (рис. 13). Ребра графа відповідають дзвінкам між друзями: Катериною, Андрієм, Олексієм, Юлією, Наталією, Денисом і Мариною.

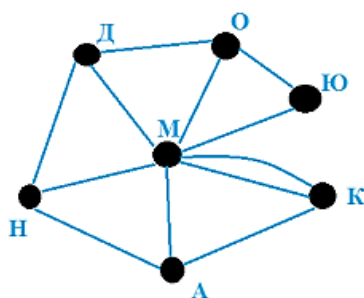


Рис. 13. Схематичне зображення зроблених телефонних дзвінків

Якщо з Катериною Марина поговорила 2 рази, то Катерина могла поговорити тільки з однією людиною, за рис. 13 це був Андрій. Катерина поговорила 2 рази з Мариною й Андрієм, Наталія поговорила з Андрієм, Мариною і Денисом, Андрій мав змогу поспілкуватися з Мариною, Катериною і Наталією, Денис поспілкувався з Мариною, Олексієм і Наталією, Олексій подзвонив Юлії, Марині та Денису, а ось Юлії випала можливість поспілкуватися з Мариною і Олексієм. Тому зробимо висновок, що у Юлії поспілкувалась по телефону не 2 рази, а 3. Марина помилилась.

Рішення задачі можна зробити більш простим, якщо використати лему про рукоистискання. Кількість зроблених дзвінків Марини, тобто степінь вершини М, дорівнює 7. Кількість дзвінків кожного з її

друзів, як вважає Марина, тобто степінь кожної з інших вершин, дорівнює 3. Отже сума степенів вершин дорівнює $7 + 3 \cdot 6 = 25$. Це непарне число, а за лемою про рукоистисання кількість ребер є половиною суми степенів його вершин, тобто $25:2=12,5$, що не є цілим числом. Тому Марина помилилася.

Висновки і перспективи подальших досліджень. Однією з переваг графів є наочність. По суті, граф – це рисунок, тому використання графів для розв’язування нескладних задач можна, на нашу думку, починати вже з 5-х класів базової школи. Графи не включено для вивчення в шкільний курс математики, але їх можна вивчати та застосовувати для розв’язання задач на уроках логіки, факультативах з математики, на заняттях математичних гуртків. В статті ми представили приклади задач, при рішенні яких використовуються графи та їх властивості, і які можуть бути запропоновано для рішення у 5-6 класах. Це задачі на побудову маршруту, на побудову зважених графів та використання жадібного алгоритму, алгоритму Прима, на використання властивостей ланцюгів та циклів, на використання леми про рукоистисання. Представлені методи та алгоритми, безумовно, не вичерпують різноманіття методів та алгоритмів теорії графів, які можна застосувати для рішення шкільних задач з математики, логіки, інформатики. Такі задачі сприяють розвитку в учнів вмінь та навичок математичного моделювання, підвищують рівень логічного, абстрактного та математичного мислення учнів, удосконалюють математичний апарат, який учні використовують для вирішення математичних задач і проблем.

Також задачі, при розв’язанні яких використовуються графи, доцільно розглядати на уроках інформатики, щоб познайомити учнів з одним з потужних математичних апаратів рішення задач. Такі уроки можуть стати інтегрованими з точки зору міждисциплінарного підходу, а вчитель на уроці буде реалізовувати міжпредметну інтеграцію, що є актуальним в сучасних умовах.

Список використаних джерел

1. Anderson I. A First Course in Discrete Mathematics. Springer Verlag. 2002, 200 p. URL: <http://www.fen.bilkent.edu.tr/~franz/dm/DM1.pdf>
2. Карнаух Т. О., Ставровський А. Б. Теорія графів у задачах. К. : КНУ, 2012. 90 с.
3. Скляр І. В. Теорія графів у школі : задачі : посібник. К. : Шкільний світ, 2010. 128 с.

References

1. Anderson I. A First Course in Discrete Mathematics. Springer Verlag. 2001, 200 p.
2. Karnaukh T. O., Stavrovskiy A. B. Teoriia hrafiv u zadachakh. K. : KNU, 2012. 90 s.
3. Skliar I. V. Teoriia hrafiv u shkoli : zadachi : posibnyk. K. : Shkilnyi svit, 2010. 128 s.